D. K. FADDEEV ★ I. S. SOMINSKII

CULEGERE DE PROBLEME DE ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

EDITURA TEHNICĂ
1954

Această culegere de probleme este destinată să servească drept manual pentru studenții din primii ani ai Facultăților de Fizico-Matematici din Universități și ai Institutelor Pedagogice. Ea este întocmită în conformitate cu cursul de Algebră superioară care se predă în Universități. Pentru multe probleme se dau indicații asupra metodelor de rezolvare. La toate exercițiile și problemele se dau răspunsurile respective, iar pentru unele probleme soluțiile sînt date în mod amănunțit.

Д. К. ФАДДЕЕВ и И. С. СОМИНСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1953

DIN PREFAȚA LA PRIMA EDIȚIE

Această Culegere de probleme de Algebră superioară a fost alcătuită în legătură cu cursul predat la Universitatea de stat din Leningrad și la Institutul pedagogic Herzen. Ea este destinată studenților din primii ani ai Universităților și ai Institutelor pedagogice, pentru asimilarea cursului de Algebră superioară.

Problemele din Culegere se împart destul de net în două categorii. Pe de o parte, a fost strîns un mare număr de exerciții numerice, menite să creeze deprinderile de calcul și să ilustreze principiile de bază ale cursului teoretic. După părerea autorilor, numărul de exerciții este absolut suficient pentru activitatea de seminar, pentru studiul individual și pentru lucrările de control.

Pe de altă parte, Culegerea cuprinde numeroase probleme grele, și de greutate medie a căror rezolvare cere, dela cel care studiază, inițiativă și spirit inventiv. Multe probleme din această categorie sînt însoțite de indicații date în partea a doua a cărții. Problemele la care se dau indicații sînt însemnate în text cu un asterisc.

La toate problemele se dau răspunsuri, iar o parte dintre ele sînt rezolvate complet.

AUTORII

PREFAȚA LA EDIȚIA A DOUA

In această ediție a fost reorganizat și completat materialul relativ la Algebra liniară. Acest material este cuprins în două capitole: în capitolul IV (Matrice) și în capitolul VII (Algebră liniară).

Cuprinsul celorlalte capitole nu a suferit aproape nici o modificare. Au fost corectate mici greșeli și erori de tipar, destul de numeroase în prima ediție. Pentru o utilizare mai comodă a Culegerii, problemele au fost numerotate în continuare.

AUTORII

PARTEA ÎNTÎI

ENUNȚURI

CAPITOLUL I

NUMERE COMPLEXE

§ 1. Operații cu numere complexe

1. $(1 + 2i)\,x + (3 - 5i)\,y = 1 - 3i.$

Să se afle x și y, considerîndu-le numere reale.

2. Să se rezolve următorul sistem, considerînd că x, y, z, t sînt numere reale:

$$(1 + i)\,x + (1 + 2i)\,y + (1 + 3i)\,z + (1 + 4i)\,t = 1 + 5i,$$
$$(3 - i)\,x + (4 - 2i)\,y + (1 + i)\,z + 4it = 2 - i.$$

3. Să se calculeze i^n, unde n este un număr întreg.

4. Să se verifice identitatea

$$x^4 + 4 = (x - 1 - i)\,(x - 1 + i)\,(x + 1 + i)\,(x + 1 - i).$$

5. Să se calculeze

a) $(1 + 2i)^6$; b) $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$; c) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$.

6. Să se stabilească în ce caz produsul a două numere complexe este pur imaginar.

7. Să se efectueze operațiile indicate

a) $\dfrac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}$; b) $\dfrac{a + bi}{a - bi}$; c) $\dfrac{(1 + 2i)^3 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^3}$;

d) $\dfrac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$; e) $\dfrac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$.

8. Să se calculeze $\dfrac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}}$, unde n este un număr întreg pozitiv.

9. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $(3-i)x+(4+2i)y=2+6i$, $(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i$;

b) $(2+i)x+(2-i)y=6$, $(3+2i)x+(3-2i)y=8$.

c) $x+yi-2z=10$, $x-y+2iz=20$,
$ix+3iy-(1+i)z=30$.

10. Să se calculeze

a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

***11.** Fie $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze

a) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$;

b) $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$;

c) $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$;

d) $(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)$.

12. Să se afle numerele complex conjugate cu:
a) pătratul lor,
b) cubul lor.

***13.** Să se demonstreze teorema:
Dacă după un număr finit de operații raționale (adică de adunări, scăderi, înmulțiri și împărțiri), efectuate cu numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, am obținut numărul u, atunci, în urma acelorași operații, aplicate conjugatelor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, vom obține numărul $\bar{u}$, conjugat cu u.

14. Să se demonstreze că $x^2+y^2=(s^2+t^2)^n$, dacă $x+yi=(s+ti)^n$.

15. Să se calculeze

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; c) $\sqrt{3-4i}$; d) $\sqrt{-15+8i}$;

e) $\sqrt{-3-4i}$; f) $\sqrt{-11+60i}$; g) $\sqrt{-8+6i}$;

h) $\sqrt{-8-6i}$; i) $\sqrt{8-6i}$; j) $\sqrt{8+6i}$; k) $\sqrt{2-3i}$;

l) $\sqrt{4+i}+\sqrt{4-i}$; m) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; n) $\sqrt[4]{-1}$;

o) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

16. $\sqrt{a+bi} = \pm(\alpha+\beta i)$. Cu cît este egal $\sqrt{-a-bi}$?

17. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$,

b) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$,

c) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.

***18.** Să se rezolve ecuaţia şi să se descompună membrul întîi în factori cu coeficienţi reali:

a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$,

b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

19. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^4-3x^2+4=0$,

b) $x^4-30x^2+289=0$.

20. Să se deducă o formulă pentru rezolvarea ecuaţiei bipătrate $x^4+px^2+q=0$ cu coeficienţi reali, valabilă în cazul $\frac{p^2}{4}-q<0$.

§ 2. Numerele complexe sub formă trigonometrică

21. Să se construiască punctele care reprezintă numerele complexe:

$1,\ -1,\ -\sqrt{2},\ i,\ -i,\ i\sqrt{2},\ -1+i,\ 2-3i.$

22. Să se scrie sub formă trigonometrică următoarele numere:

a) 1; b) -1; c) i; d) $-i$; e) $1+i$; f) $-1+i$; g) $-1-i$;

h) $1-i$; i) $1+i\sqrt{3}$; j) $-1+i\sqrt{3}$; k) $-1-i\sqrt{3}$;

l) $1-i\sqrt{3}$; m) $2i$; n) -3; o) $\sqrt{3}-i$; p) $2+\sqrt{3}+i$.

23. Folosind tabelele, să se reprezinte sub formă trigonometrică următoarele numere:

a) $3+i$; b) $4-i$; c) $-2+i$; d) $-1-2i$.

24. Să se afle locul geometric al punctelor care reprezintă numerele complexe:

a) al căror modul este egal cu 1;

b) al căror argument este egal cu $\frac{\pi}{6}$.

25. Să se afle locul geometric al punctelor z, care verifică una dintre inegalitățile următoare:

a) $|z| < 2$; b) $|z - i| \leqslant 1$; c) $|z - 1 - i| < 1$.

26. Să se rezolve ecuațiile

a) $|x| - x = 1 + 2i$;

b) $|x| + x = 2 + i$.

***27.** Să se demonstreze identitatea:

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2);$$

care este semnificația geometrică a acestei identități?

***28.** Să se demonstreze că orice număr complex z, diferit de -1 și având modulul egal cu 1, poate fi reprezentat sub forma $z = \frac{1+ti}{1-ti}$, unde t este un număr real.

29. În ce condiții modulul sumei a două numere complexe este egal cu diferența modulelor termenilor?

30. În ce condiții modulul sumei a două numere complexe este egal cu suma modulelor termenilor?

***31.** Fie z și z' două numere complexe și $u = \sqrt{zz'}$. Să se demonstreze că $|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$.

32. Să se demonstreze că dacă $|z| < \frac{1}{2}$, atunci

$$|(1 + i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

33. Să se demonstreze că

$$(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right)\right].$$

34. Să se simplifice $\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi - i\sin\psi}$.

35. Să se calculeze $\frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$.

36. Să se calculeze

a) $(1+i)^{25}$; b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; c) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

d) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

***37.** Să se demonstreze că

a) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$,

unde n este un număr întreg.

***38.** Să se simplifice $(1+\omega)^n$, unde $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

39. Punînd $\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se determine $\omega_1^n + \omega_2^n$, unde n este un număr întreg.

***40.** Să se calculeze $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

***41.** Dacă $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, atunci $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\,\theta$.

***42.** Să se demonstreze că $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

43. Să se extragă rădăcinile

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[3]{2-2i}$; c) $\sqrt[4]{-4}$; d) $\sqrt[6]{1}$; e) $\sqrt[6]{-27}$.

44. Folosind tabelele, să se extragă rădăcinile

a) $\sqrt[3]{2+i}$; b) $\sqrt[3]{3-i}$; c) $\sqrt[5]{2+3i}$.

45. Să se calculeze

a) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; b) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; c) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

46. Știind că β este una dintre valorile radicalului $\sqrt[n]{\alpha}$, să se scrie toate valorile lui $\sqrt[n]{\alpha}$.

47. Să se exprime în funcție de $\cos x$ și $\sin x$:

a) $\cos 5x$; b) $\cos 8x$; c) $\sin 6x$; d) $\sin 7x$.

48. Să se exprime $\operatorname{tg} 6\varphi$ în funcție de $\operatorname{tg}\varphi$.

49. Să se deducă formulele care exprimă pe $\cos nx$ și $\sin nx$ în funcție de $\cos x$ și $\sin x$.

50. Să se exprime prin polinoame de gradul întîi în raport cu funcțiile trigonometrice ale multiplilor arcului x, expresiile:

a) $\sin^3 x$; b) $\sin^4 x$; c) $\cos^5 x$; d) $\cos^6 x$.

***51.** Să se demonstreze că

a) $2^{2m}\cos^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}\cos 2(m-k)x + C_{2m}^{m}$;

b) $2^{2m}\cos^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^{k}\cos(2m-2k+1)x$;

c) $2^{2m}\sin^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}C_{2m}^{k}\cos 2(m-k)x + C_{2m}^{m}$;

d) $2^{2m}\sin^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}C_{2m+1}^{k}\sin(2m-2k+1)x$.

***52.** Să se demonstreze că $2\cos mx = (2\cos x)^m -$

$$-\frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-4} - \ldots +$$

$$+(-1)^p\frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{p!}(2\cos x)^{m-2p} + \ldots$$

***53.** Să se exprime $\frac{\sin mx}{\sin x}$ în funcție de $\cos x$.

***54.** Să se calculeze sumele:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

***55.** Să se demonstreze că

a) $1 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}\right)$;

c) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}\right)$;

d) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}\right)$.

***56.** Să se calculeze suma:

$$C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^3 + \frac{1}{9} C_n^5 - \frac{1}{27} C_n^7 + \ldots$$

57. Să se demonstreze că

$$(x + a)^m + (x + a\omega)^m + (x + a\omega^2)^m = 3x^m +$$

$+ 3C_m^3 x^{m-3} a^3 + \ldots + 3C_m^n x^{m-n} a^n$, unde $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$,

iar n este cel mai mare număr întreg, multiplu de 3, care nu depășește pe m.

58. Să se demonstreze că

a) $1 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}\right)$;

b) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

c) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2 \cos \frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

59. Să se calculeze sumele:

a) $1 + a \cos\varphi + a^2 \cos 2\varphi + \ldots + a^k \cos k\varphi$;

b) $\sin\varphi + a\sin(\varphi+h) + a^2\sin(\varphi+2h) + \ldots + a^k\sin(\varphi+kh)$;

c) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

60. Să se arate că

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

61. Să se afle

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{2^n}\cos nx\right).$$

62. Dacă n este un număr întreg și pozitiv, iar θ este unghiul care verifică condiția $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2n}$, atunci

$$\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} + \ldots + \cos\frac{2n-1}{2}\theta = n\sin n\theta.$$

63. Să se arate că

a) $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$,

b) $\cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11} + \cos\frac{8\pi}{11} + \cos\frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}$,

c) $\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{7\pi}{13} + \cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2}$.

64. Să se afle sumele

a) $\cos a - \cos(a+h) + \cos(a+2h) - \ldots$
$\ldots + (-1)^{n-1}\cos[a+(n-1)h]$;

b) $\sin a - \sin(a+h) + \sin(a+2h) - \ldots$
$\ldots + (-1)^{n-1}\sin[a+(n-1)h]$.

65. Să se demonstreze că dacă x este în valoare absolută mai mic decît unitatea, atunci seriile

a) $\cos\alpha + x\cos(\alpha+\beta) + x^2\cos(\alpha+2\beta) + \ldots$
$\ldots + x^n\cos(\alpha+n\beta) + \ldots,$

b) $\sin\alpha + x\sin(\alpha+\beta) + x^2\sin(\alpha+2\beta) + \ldots$
$\ldots + x^n\sin(\alpha+n\beta) + \ldots$

sînt convergente şi sumele lor sînt egale, respectiv, cu

$$\frac{\cos\alpha - x\cos(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2};\quad \frac{\sin\alpha - x\sin(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2}.$$

66. Să se afle sumele

a) $\cos x + C_n^1\cos 2x + \ldots + C_n^n\cos(n+1)x;$

b) $\sin x + C_n^1\sin 2x + \ldots + C_n^n\sin(n+1)x.$

67. Să se afle sumele

a) $\cos x - C_n^1\cos 2x + C_n^2\cos 3x - \ldots + (-1)^n C_n^n\cos(n+1)x;$

b) $\sin x - C_n^1\sin 2x + C_n^2\sin 3x - \ldots + (-1)^n C_n^n\sin(n+1)x.$

***68.** Fie $\overrightarrow{OA_1}$ şi $\overrightarrow{OB}$ vectorii care reprezintă, respectiv, numerele complexe 1 şi i. Din O se coboară perpendiculara OA_2 pe A_1B; din A_2 se coboară perpendiculara A_2A_3 pe OA_1; din A_3 — perpendiculara A_3A_4 pe A_1A_2 etc., după regula: din A_n se coboară perpendiculara A_nA_{n+1} pe $A_{n-2}A_{n-1}$. Să se afle limita sumei

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots$$

***69.** Să se afle suma:

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2(2n-1)x.$$

70. Să se arate că

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x};$

b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}.$

*71. Să se afle sumele

a) $\cos^3 x + \cos^3 2x + \ldots + \cos^3 nx$;

b) $\sin^3 x + \sin^3 2x + \ldots + \sin^3 nx$.

*72. Să se afle sumele:

a) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$;

b) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx$.

73. Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ pentru $\alpha = a + bi$.

74. Știind că: $e^{\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$,

să se demonstreze că:

a) $e^{2\pi i} = 1$; b) $e^{\pi i} = -1$;

c) $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}\cdot e^{\beta}$; d) $(e^{\alpha})^k = e^{\alpha k}$ pentru k întreg.

§ 3. Ecuații de gradul al treilea și al patrulea

75. Să se rezolve prin formula lui Cardan ecuațiile:

a) $x^3 - 6x + 9 = 0$; b) $x^3 + 12x + 63 = 0$;

c) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$; d) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$;

e) $x^3 - 6x + 4 = 0$; f) $x^3 + 6x + 2 = 0$;

g) $x^3 + 18x + 15 = 0$; h) $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$;

i) $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$; j) $x^3 + 9x - 26 = 0$;

k) $x^3 + 24x - 56 = 0$; l) $x^3 + 45x - 98 = 0$;

m) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$; n) $x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0$;

o) $x^3 + 3x - 2i = 0$; p) $x^3 - 6ix + 4(1 - i) = 0$;

r) $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$;

s) $x^3 - 3abfgx + f^2ga^3 + fg^2b^3 = 0$;

t) $x^3 - 4x - 1 = 0$; u) $x^3 - 4x + 2 = 0$.

*76. Folosind formula lui Cardan să se arate că

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2,$$

x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuație $x^3 + px + q = 0$.

(Expresia $-4p^3 - 27q^2$ se numește discriminantul ecuației $x^3 + px + q = 0$).

***77.** Să se rezolve ecuația

$$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px + q)^3 = 0.$$

***78.** Să se deducă formula pentru rezolvarea ecuației

$$x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - 2b = 0.$$

79. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$;
b) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$;
c) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$;
d) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$;
e) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$;
f) $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 27x - 56 = 0$;
g) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$;
h) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$;
i) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7 = 0$;
j) $x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 8 = 0$;
k) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$;
l) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5 = 0$;
m) $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$;
n) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$;
o) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$;
p) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 - 8x + 4 = 0$;
r) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$;
s) $x^4 - x^3 + 2x - 1 = 0$;
t) $4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$;
u) $4x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$.

80. Metoda lui Ferrari pentru rezolvarea ecuației de gradul al patrulea $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ constă în faptul că membrul întîi se reprezintă sub forma

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} + \lambda - b\right)x^2 + \left(\frac{a\lambda}{2} - c\right)x + \left(\frac{\lambda^2}{4} - d\right)\right],$$

iar apoi λ se alege astfel, încît expresia din paranteza dreaptă să fie un pătrat perfect. Pentru aceasta este necesar și suficient ca

$$\left(\frac{a\lambda}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + \lambda - b\right)\left(\frac{\lambda^2}{4} - d\right) = 0,$$

adică λ trebuie să verifice o ecuație auxiliară de gradul trei. Aflînd pe λ, membrul întîi al ecuației se descompune în factori.

Să se exprime rădăcinile ecuației auxiliare în funcție de rădăcinile ecuației de gradul patru.

§ 4. Rădăcinile unității

81. Să se scrie rădăcinile unității de ordinul

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

82. Să se scrie rădăcinile primitive ale unității de ordinul

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

83. Cărui indice [1]) îi aparține

a) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{180} + i\sin\frac{2k\pi}{180}$ pentru $k = 27,99,137$;

b) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{144} + i\sin\frac{2k\pi}{144}$ pentru $k = 10,35,60$?

84. Să se scrie toate rădăcinile de ordinul 28 ale unității care aparțin indicelui 7.

85. Pentru fiecare rădăcină de ordinul a) 16; b) 20; c) 24 a unității, să se arate indicele căruia îi aparține.

86. Să se scrie *polinoamele de diviziune a cercului* $X_n(x)$ pentru n egal cu

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6; g) 7; h) 8; i) 9; j) 10; k) 11; l) 12; m) 15; n) 105.

***87.** ε fiind o rădăcină primitivă de ordinul $2n$ a unității, să se calculeze suma $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$.

---

[1]) Se numește indice cel mai mic număr m pentru care $z_k^m = 1$ (N. Tr.).

***88.** Să se afle suma tuturor rădăcinilor de ordinul n ale unității.

***89.** Să se afle suma puterilor k ale tururor rădăcinilor de ordinul n ale unității.

90. In expresia $(x + a)^m$ să se substituie succesiv, în loc de a cele m rădăcini de ordinul m ale unității și să se adune rezultatele obținute.

***91.** Să se calculeze $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1}$, unde ε este o rădăcină de ordinul n a unității.

***92.** Să se calculeze $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \ldots + n^2\varepsilon^{n-1}$, unde ε este o rădăcină de ordinul n a unității.

93. Să se afle sumele:

a) $\cos\frac{2\pi}{n} + 2\cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + (n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$;

b) $\sin\frac{2\pi}{n} + 2\sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + (n-1)\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

***94.** Să se determine suma rădăcinilor primitive ale unității de ordinul: a) 15; b) 24; c) 30.

95. Să se afle rădăcinile de ordinul 5 ale unității, rezolvînd algebric ecuația $x^5 - 1 = 0$.

96. Să se scrie $\sin 18°$ și $\cos 18°$ folosind rezultatul problemei 95.

***97.** Să se formeze ecuația algebrică, cea mai simplă, care admite ca rădăcină lungimea laturii poligonului regulat cu 14 laturi, înscris într-un cerc de rază 1.

***98.** Să se descompună polinomul $x^n - 1$ într-un produs de factori de gradul întîi și al doilea, cu coeficienți reali.

***99.** Să se utilizeze rezultatul problemei 98 la demonstrarea formulelor

a) $\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$;

b) $\sin\frac{\pi}{2m+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m+1}\ldots\sin\frac{m\pi}{2m+1} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$.

***100.** Să se demonstreze că $\prod_{k=0}^{n-1}(a + b\varepsilon_k) = a^n + (-1)^{n-1}b^n$,

unde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

*101. Să se demonstreze că,

$$\prod_{k=0}^{n-1}(\varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k \cos\theta + 1) = 2(1 - \cos n\theta),$$

dacă

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

102. Să se demonstreze că

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(t+\varepsilon_k)^n - 1}{t} = \prod_{k=1}^{n-1}[t^n - (\varepsilon_k - 1)^n],$$

unde

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

*103. Să se afle toate numerele complexe care verifică relația $\bar{x} = x^{n-1}$, unde $\bar{x}$ este conjugatul lui x.

104. Să se arate că rădăcinile ecuației $\lambda(z-a)^n + \mu(z-b)^n = 0$, cu λ, μ, a, b numere complexe, sunt situate pe aceeași circumferință (n este un număr natural).

*105. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(x+1)^m - (x-1)^m = 0$;

b) $(x+i)^m - (x-i)^m = 0$;

c) $x^n - nax^{n-1} - C_n^2 a^2 x^{n-2} - \ldots - a^n = 0$.

106. Să se demonstreze că dacă A este un număr complex de modul egal cu unitatea, atunci ecuația

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A$$

are toate rădăcinile reale și distincte.

*107. Să se rezolve ecuația

$$\cos\varphi + C_n^1\cos(\varphi+\alpha)\,x + C_n^2\cos(\varphi+2\alpha)\,x^2 + \ldots + C_n^n\cos(\varphi+n\alpha)\,x^n = 0.$$

108. Să se demonstreze că produsul unei rădăcini de ordinul m a unității cu o rădăcină de ordinul n a unității este o rădăcină de ordinul mn a unității.

109. Dacă m și n sunt prime între ele, atunci $x^m - 1$ și $x^n - 1$ au o singură rădăcină comună.

110. Dacă m și n sunt prime între ele, atunci toate rădăcinile de ordinul mn ale unității se obțin prin înmulțirea rădăcinilor de ordinul m ale unității cu rădăcinile de ordinul n ale unității.

111. Dacă m și n sunt prime între ele, atunci produsul dintre o rădăcină primitivă de ordinul m a unității și o rădăcină primitivă de ordinul n a unității este o rădăcină primitivă de ordinul mn a unității și reciproc.

112. Notînd cu $\varphi(u)$ numărul rădăcinilor primitive de ordinul u ale unității, să se demonstreze că $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$, dacă m și n sunt prime între ele.

***113.** Să se demonstreze că dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sînt numere prime diferite, atunci

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

114. Să se arate că numărul rădăcinilor primitive de ordinul n ale unității este par, dacă $n>2$.

115. Să se scrie polinomul $X_p(x)$, unde p este un număr prim.

***116.** Să se scrie polinomul $X_p\, m(x)$, unde p este un număr prim.

***117.** Să se demonstreze că pentru n impar mai mare decît 1, $X_{2n}(x)$ este egal cu $X_n(-x)$.

118. Să se demonstreze că dacă d este produsul factorilor primi ai lui n luați cîte o singură dată, atunci orice rădăcină primitivă de ordinul nd a unității este o rădăcină de ordinul d din rădăcina primitivă de ordinul n a unității, și invers.

***119.** Să se demonstreze că dacă $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sînt numere prime distincte, atunci $X_n(x) = X_{n'}(x^{n''})$, unde

$$n' = p_1 p_2 \dots p_k; \qquad n'' = \frac{n}{n'}.$$

***120.** Notînd cu $\mu(n)$ suma rădăcinilor primitive de ordinul n ale unității, să se demonstreze că $\mu(n)=0$, dacă n este divizibil cu pătratul unui număr prim; $\mu(n)=1$, dacă n este produsul unui număr par de numere prime distincte; $\mu(n)=-1$, dacă n este produsul unui număr impar de numere prime distincte.

121. Să se demonstreze că $\sum\mu(d)=0$, dacă d ia toate valorile divizorilor numărului n pentru $n\neq 1$.

***122.** Să se demonstreze că $X_n(x) = \prod (x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$, unde d ia toate valorile divizorilor numărului n.

***123.** Să se afle $X_n(1)$.

***124.** Să se afle $X_n(-1)$.

***125.** Să se determine suma produselor rădăcinilor primitive de ordinul n ale unității, luate două cîte două.

***126.** Fie $S=1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}$, unde ε este o rădăcină primitivă de ordinul n a unității. Să se afle $|S|$.

CATITOLUL II

CALCULUL DETERMINANȚILOR

§ 1. Determinanți de ordinul al doilea și al treilea

Să se calculeze determinanții:

127. a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ \gamma-\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; l) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

m) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; n) $\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}$,

unde $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$;

o) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, unde $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

128. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$ unde $\omega = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$;

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$, $\omega = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

§ 2. Permutări

129. Să se scrie transpozițiile cu ajutorul cărora se poate trece dela permutarea 1, 2, 4, 3, 5 la permutarea 2, 5, 3, 4, 1.

130. Considerînd că 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, este ordinea inițială, să se determine numărul de inversiuni în permutările:

a) 1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5; b) 2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4;

c) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

131. Considerînd că 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 reprezintă ordinea inițială, să se aleagă i și k astfel încît

a) permutarea 1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9 să fie pară;

b) permutarea 1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7 să fie impară.

***132.** Să se determine numărul inversiunilor din permutarea $n, n-1, \ldots, 2, 1$, dacă permutarea inițială este $1, 2, \ldots, n$.

133. In permutarea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ există I inversiuni. Cîte inversiuni vor fi în permutarea $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$?

134. Să se determine numărul inversiunilor din permutările:

a) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n$;
b) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$,

dacă permutarea inițială este $1, 2, \ldots, 2n$.

135. Să se determine numărul inversiunilor din permutările

a) $3, 6, 9, \ldots, 3n, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, \ldots, 3n-1$;
b) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, \ldots, 3n-1, 3, 6, \ldots, 3n$,

dacă permutarea inițială este $1, 2, 3, \ldots, 3n$.

136. Să se demonstreze că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o permutare cu I inversiuni, atunci după aranjarea ei în ordinea inițială, indicii $1, 2, \ldots, n$ formează o permutare cu același număr I de inversiuni.

137. Să se determine paritatea permutării literelor t, r, m, i, a, g, o, l, dacă se ia ca ordine inițială așezarea lor în cuvîntul: a) logaritm, b) algoritm.

Să se compare și să se explice rezultatele.

§ 3. Definiția determinantului

138. Cu ce semn vor intra în determinantul de ordinul al șaselea produsele:

a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$?

139. Să se stabilească dacă produsele

a) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$; b) $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$

intră în determinantul de ordinul al cincilea.

140. Să se aleagă i și k astfel, încît produsul $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ să intre în determinantul de ordinul al cincilea cu semnul plus (+).

141. Să se scrie toți termenii care intră în determinantul de ordinul 4 cu semnul minus (—) și care conțin elementul a_{23}.

142. Să se scrie toți termenii care intră în determinantul de ordinul al cincilea și care sînt de forma $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$. Ce se obține, dacă din suma lor se scoate factorul comun $a_{14}a_{23}$ înafara parantezei.

143. Cu ce semn intră în determinantul de ordinul n produsul elementelor de pe diagonala principală?

144. Cu ce semn intră în determinantul de ordinul n produsul elementelor de pe diagonala a doua?

***145.** Folosind numai definiția determinantului,

să se demonstreze că determinantul $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ este egal cu zero.

146. Folosind numai definiția determinantului să se calculeze coeficienții lui x^4 și x^3 în expresia

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

147. Să se calculeze determinanții

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$.

Observație. La toate problemele în care din enunț nu reiese ordinul determinantului și nu se specifică nimic în această privință, acest ordin va fi considerat egal cu n.

148. Știind că

$$F(x)=x(x-1)\ (x-2)\ \dots\ (x-n+1),$$

să se calculeze determinanții

a) $\begin{vmatrix} F(0) & F(1) & F(2) & \dots & F(n) \\ F(1) & F(2) & F(3) & \dots & F(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(n) & F(n+1) & F(n+2) & \dots & F(2n) \end{vmatrix}$;

b)
$$\begin{vmatrix} F(a) & F'(a) & F''(a) & \dots & F^{(n)}(a) \\ F'(a) & F''(a) & F'''(a) & \dots & F^{(n+1)}(a) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F^{(n)}(a) & F^{(n+1)}(a) & F^{(n+2)}(a) & \dots & F^{(2n)}(a) \end{vmatrix}$$

§ 4. Proprietățile fundamentale ale determinanților

***149.** Să se demonstreze că un determinant de ordinul n, în care orice element a_{ik} este conjugatul complex al elementului a_{ki}, este egal cu un număr real.

***150.** Să se demonstreze că un determinant de ordin impar, ale cărui elemente satisfac condiția

$$a_{ik} + a_{ki} = 0$$

determinant simetric strîmb) este egal cu 0.

151. Determinantul $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ este egal cu Δ;

cu ce este egal determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix} ?$$

152. Cum se va schimba valoarea unui determinant dacă scriem coloanele lui în ordinea inversă?

***153.** Cu ce este egală

$$\sum \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \dots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \dots & a_{2\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \dots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

dacă însumarea se extinde la toate permutările $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$?

*154. Să se rezolve ecuația

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$, unde $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ sînt toți diferiți între ei;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0;$

c) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0.$

*155. Numerele 204, 527 și 255 sînt divizibile cu 17.

Să se arate că determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ este divizibil cu 17.

*156. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

157. Să se demonstreze că

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

158. Să se simplifice determinantul

$$\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix},$$

descompunîndu-l într-o sumă de determinanți.

159. Să se găsească suma complementilor algebrici ai tuturor elementelor determinanților

a) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

160. Să se dezvolte după elementele liniei a treia și să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

161. Să se dezvolte după elementele ultimei coloane și să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

162. Să se dezvolte după elementele primei coloane și să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

§ 5. Calculul determinanților

Să se calculeze determinnații

***163.** $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$.

164. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

165. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. **166.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$. **167.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

168. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$. **169.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

170. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. **171.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

172. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$. **173.** $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

174. $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$. **175.** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.

176. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

177. $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$.

178. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$. ***179.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

***180.**

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

***181.**

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}.$$

***182.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

***183.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

***184.**

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

***185.**

$$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

***186.**

$$\begin{vmatrix} a-(a+h) & \dots & (-1)^{n-2}[a+(n-2)h] & (-1)^{n-1}[a+(n-1)h] \\ a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & a \end{vmatrix}.$$

***187.**
$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & C_{n-2}^3 & \dots & C_{n-2}^{n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

***188.**
$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

***189.**
$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

***190.** Să se calculeze diferența $f(x+1)-f(x)$, unde

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \dots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

***191.**
$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

***192.**
$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

193.

$$\begin{vmatrix} x & a & a \dots & a & a \\ -a & x & a \dots & a & a \\ -a & -a & x \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a \dots & -a & x \end{vmatrix}$$

***194.**

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

***195.**

$$\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

***196.**

$$\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \dots 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots h \end{vmatrix}$$

***197.**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \dots & x & x \\ 1 & x & 0 \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x \dots & 0 & x \\ 1 & x & x \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

***198.**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1+a_2 \dots & a_1+a_n \\ 1 & a_2+a_1 & 0 \dots & a_2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n+a_1 & a_n+a_2 \dots & 0 \end{vmatrix}$$

***199.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1-n & 1 \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

***200.**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

(de ordinul $n+1$)

***201**

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ x_{11} & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ x_{21} & x_{22} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

***202.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

***203.**

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & -b_0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

***204.**

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2a+b & (a+b)^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a+3b & (a+2b)^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2a+(2n-1)b & (a+nb)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2a+(2n+1)b \end{vmatrix}$$

***205.**

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

***206.**

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

207.

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

***208.**

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \dots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & & a_2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \dots & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

209.

$$\begin{vmatrix} a^n-\alpha & a^{n+1}-\alpha & \dots & a^{n+p-1}-\alpha \\ a^{n+p}-\alpha & a^{n+p+1}-\alpha & \dots & a^{n+2p-1}-\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n+p(p-1)}-\alpha & a^{n+p(p-1)+1}-\alpha & \dots & a^{n+p^2-1}-\alpha \end{vmatrix}.$$

210. Să se demonstreze că dacă $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_n(x)$ sunt polinoame în x de gradul cel mult $n-2$, iar a_1, a_2, ..., a_n sunt numere arbitrare, determinantul

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

este egal cu zero.

***211.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

***212.**

$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

***213.**

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}.$$

***214.**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

***215.**

$$\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

***216.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$$

Să se scrie apoi determinantul de ordinul n cu această structură și să se calculeze.

217.

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

218.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

***219.**

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

220.

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

***221.**

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

***222.**

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \dots & x_1y_n \\ x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & \dots & x_2y_n \\ x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & \dots & x_3y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1y_n & x_2y_n & x_3y_n & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

***223.**

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

224.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a_1+1 \\ 1 & 1 & \dots & a_2+1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1}+1 & \dots & 1 & 1 \\ a_n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***225.**

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

***226.**

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

***227.**

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & x_2 & a_3b_2 & \dots & a_nb_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & x_3 & \dots & a_nb_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

***228.** $\begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - m & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n - m \end{vmatrix}$.

229. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n - \alpha_n x \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} - \alpha_{n-1} x & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 - \alpha_1 x & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

***230.**

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

(de ordinul $2n$)

***231.**

$$\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \dots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \dots & -(n-1)b \\ 1 & (n-1)a & a & -3b & \dots & -(n-1)b \\ 1 & (n-2)a & a & a & \dots & -(n-1)b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}$$

***232.**

$$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}$$

***233.**

$$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}$$

***234.**

$$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}$$

***235.**

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & 0 & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

*236. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

*237. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ x & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

*238.

$$\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & & \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \dots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}.$$

*239. Să se demonstreze că:

$$\begin{vmatrix} a_{00}x^n & a_{01}x^{n-1} & a_{02}x^{n-2} & \dots & a_{0n} \\ a_{10}x & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20}x^2 & a_{21}x & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \\ a_{n0}x^n & a_{n1}x^{n-1} & a_{n2}x^{n-2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ este egal cu x^n. $$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*240. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$.

*241. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & \dots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}$.

*242. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}$

*243. $\begin{vmatrix} C_m^k & C_m^{k+1} & \dots & C_m^{k+n} \\ C_{m+1}^k & C_{m+1}^{k+1} & \dots & C_{m+1}^{k+n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m+n}^k & C_{m+n}^{k+1} & \dots & C_{m+n}^{k+n} \end{vmatrix}$.

***244.**

$$\begin{vmatrix} C_{k+m}^m & C_{k+m+1}^m & \dots & C_{k+2m}^m \\ C_{k+m+1}^m & C_{k+m+2}^m & \dots & C_{k+2m+1}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{k+2m}^m & C_{k+2m+1}^m & \dots & C_{k+3m}^m \end{vmatrix}.$$

***245.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

***246.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \dots & x^2 \\ 1 & 3 & 3.2 & 3! & \dots & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

***247.**

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\delta & \alpha+2\delta & \alpha+3\delta & \dots & \alpha+(n-1)\delta \\ \alpha & 2\alpha+\delta & 3\alpha+3\delta & 4\alpha+6\delta & \dots & C_n^1\alpha+C_n^2\delta \\ \alpha & 3\alpha+\delta & 6\alpha+4\delta & 10\alpha+10\delta & \dots & C_{n+1}^2\alpha+C_{n+1}^3\delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & C_n^{n-1}\alpha+\delta & C_{n+1}^{n-1}\alpha+C_{n+1}^n\delta & C_{n+2}^{n-1}\alpha+C_{n+2}^n\delta & \dots & C_{2n-2}^{n-1}\alpha+C_{2n-2}^n\delta \end{vmatrix}.$$

***248.**

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & x & \dots & y & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}.$$

***249.**

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & 0 \\ a & a & a & \dots & 0 & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & b & \dots & b & b \\ 0 & b & b & \dots & b & b \end{vmatrix}.$$

250.

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

251.

$$\begin{vmatrix} c_1 & a & a & \dots & a & 1 \\ b & c_2 & a & \dots & a & 1 \\ b & b & c_3 & \dots & a & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & c_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

***252.**
$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}.$$

***253.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

***254.**
$$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a \\ a+2h & a+3h & a+4h & \dots & a+h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-2)h \end{vmatrix}.$$

255.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x^2 & x^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

***256.**
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

257.
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix}$$

***258.**
$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

***259.**
$$\begin{vmatrix} \cos^{n-1}\varphi_1 & \cos^{n-2}\varphi_1 & \dots & \cos\varphi_1 & 1 \\ \cos^{n-1}\varphi_2 & \cos^{n-2}\varphi_2 & \dots & \cos\varphi_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{n-1}\varphi_n & \cos^{n-2}\varphi_n & \dots & \cos\varphi_n & 1 \end{vmatrix}.$$

260.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \dots & \sin\varphi_n \\ \sin^2\varphi_1 & \sin^2\varphi_2 & \dots & \sin^2\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-1}\varphi_2 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

261.
$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

262.
$$\begin{vmatrix} (a_1+x)^n & (a_1+x)^{n-1} & \dots & a_1+x\,1 \\ (a_2+x)^n & (a_2+x)^{n-1} & \dots & a_2+x\,1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n+1}+x)^n & (a_{n+1}+x)^{n-1} & \dots & a_{n+1}+x\,1 \end{vmatrix}.$$

263.
$$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***264.**
$$\begin{vmatrix} w_1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ w_2 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***265.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \dots & x_n^2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

266.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin\varphi_1 & 1+\sin\varphi_2 & 1+\sin\varphi_n \\ \sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1 & \sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2 & \sin\varphi_n+\sin^2\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-2}\varphi_1+\sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-2}\varphi_2+\sin^{n-1}\varphi_2 & \sin^{n-2}\varphi_n+\sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

267.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

unde $\varphi_k(x) = x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk}$.

268. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ F_1(\cos\varphi_1) & F_1(\cos\varphi_2) & \dots & F_1(\cos\varphi_n) \\ F_2(\cos\varphi_1) & F_2(\cos\varphi_2) & \dots & F_2(\cos\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n-1}(\cos\varphi_1) & F_{n-1}(\cos\varphi_2) & \dots & F_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix},$$

unde $F_k(x) = a_{0k}\,x^k + a_{1k}\,x^{k-1} + \dots + a_{kk}$.

***269.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{1\cdot 2\dots k}.$$

***270.** Să se demonstreze că valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt numere întregi, este divizibilă cu $1^{n-1}\,2^{n-2}\,\dots\,(n-1)$.

***271.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

***272.** $$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

*273. $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$.

274. $\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-2}\alpha_1 \cos\alpha_1 & \dots & \sin\alpha_1 \cos^{n-2}\alpha_1 & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \sin^{n-1}\alpha_2 & \sin^{n-2}\alpha_2 \cos\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_2 \cos^{n-2}\alpha_2 & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \sin^{n-1}\alpha_n & \sin^{n-2}\alpha_n \cos\alpha_n & \dots & \sin\alpha_n \cos^{n-2}\alpha_n & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}$.

*275. $\begin{vmatrix} a_1^{2n}+1 & a_1^{2n-1}+a_1 & a_1^{2n-2}+a_1^2 & \dots & a_1^{n+1}+a_1^{n-1}a_1^n \\ a_2^{2n}+1 & a_2^{2n-1}+a_2 & a_2^{2n-2}+a_2^2 & \dots & a_2^{n+1}+a_2^{n-1}a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n+1}^{2n}+1 & a_{n+1}^{2n-1}+a_{n+1} & a_{n+1}^{2n-2}+a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n+1}+a_{n+1}^{n-1}a_{n+1}^n \end{vmatrix}$.

*276. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 & \dots & \cos(n-1)\varphi_0 \\ 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \cos\varphi_{n-1} & \cos 2\varphi_{n-1} & \dots & \cos(n-1)\varphi_{n-1} \end{vmatrix}$.

*277. $\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 & \dots & \sin\alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 & \dots & \sin\alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n & \dots & \sin\alpha_n \end{vmatrix}$.

*278. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \dots & x_n(x_n-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_n^2(x_n-1) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}$.

***279.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

***280.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

281.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{s-1} & x_2^{s-1} & \dots & x_n^{s-1} \\ x_1^{s+1} & x_2^{s+1} & \dots & x_n^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

***282.**

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

283.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}.$$

284.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}.$$

***285.**

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & (n+1)\,x^n \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \dots & (n+1)^2\,x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{n-1}x & 3^{n-1}x^2 & \dots & (n+1)^{n-1}\,x^n \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^n \end{vmatrix}.$$

***286.**

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & nx^{n-1} \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \dots & n^2x^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{k-1}x & 3^{k-1}x^2 & \dots & n^{k-1}x^{n-1} \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_{n-k} & y_{n-k}^2 & \dots & y_{n-k}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***287.**

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 x & \dots & C_{n-1}^1 x^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-1}^2 x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{k-1} x^{n-k} \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 y & \dots & C_{n-1}^1 y^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-k-1} y^k \end{vmatrix}.$$

288. a) Să se scrie dezvoltarea unui determinant de ordinul al patrulea după minorii primelor două linii.

b) Să se calculeze determinantul: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, folosind dezvoltarea după minorii de ordinul al doilea.

c) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, folosind dezvoltarea după minorii de ordinul al doilea.

d) Să se calculeze determinantul din exercițiul 145.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 9 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}$.

f) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$.

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}$.

h) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ x_1 & \alpha & \beta & \dots & \beta & y_1 \\ x_2 & \beta & \alpha & \dots & \beta & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & \beta & \beta & \dots & \alpha & y_n \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$.

i) Folosind teorema lui Laplace, să se calculeze determinantul din problema 230.

j) Folosind teorema lui Laplace, să se calculeze determinantul din problema 171.

k) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$.

l) Fie A, B, C, D, determinanții de ordinul al treilea, formați din tabela $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$, respectiv prin tăierea coloanelor I, II, III și IV.

Să se demonstreze că $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC$.

*m) Să se calculeze determinantul de ordinul al 15-lea

$$\begin{vmatrix} \Delta & \Delta_1 & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta_1 & \Delta \end{vmatrix},$$

format în modul indicat din celulele

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & x & x & -x & -x \\ x & 2a & a & 0 & 0 \\ x & a & 2a & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 2a & a \\ -x & 0 & 0 & a & 2a \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Înmulțirea determinanților

289. Folosind regula de înmulțire a matricelor, să se reprezinte produsul determinanților sub formă de determinant

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

290. Să se calculeze determinantul Δ prin înmulțirea lui cu determinantul δ, în cazurile următoare:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}$; $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

b) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

c) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$; $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

291. Să se calculeze pătratele determinanților

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$.

292. Dacă determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = D.$$

atunci cu ce este egal determinantul

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_1), & \varphi_0(x_2), & \ldots, & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1), & \varphi_1(x_2), & \ldots, & \varphi_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1), & \varphi_{n-1}(x_2), & \ldots, & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

unde $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}\,x + \ldots + a_{n-1,\,i}\,x^{n-1}$?

Să se aplice rezultatul obținut la rezolvarea problemelor 265, 267, 268.

***293.** Să se calculeze determinanții

a)
$$\begin{vmatrix} (b_0 + a_0)^n, & (b_1 + a_0)^n, & \ldots & (b_n + a_0)^n \\ (b_0 + a_1)^n, & (b_1 + a_1)^n, & \ldots & (b_n + a_1)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (b_0 + a_n)^n, & (b_1 + a_n)^n, & \ldots & (b_n + a_n)^n \end{vmatrix}.$$

b)
$$\begin{vmatrix} \dfrac{1-\alpha_1^n\beta_1^n}{1-\alpha_1\beta_1}, & \dfrac{1-\alpha_1^n\beta_2^n}{1-\alpha_1\beta_2}, & \ldots, & \dfrac{1-\alpha_1^n\beta_n^n}{1-\alpha_1\beta_n} \\ \dfrac{1-\alpha_2^n\beta_1^n}{1-\alpha_2\beta_1}, & \dfrac{1-\alpha_2^n\beta_2^n}{1-\alpha_2\beta_2}, & \ldots, & \dfrac{1-\alpha_2^n\beta_n^n}{1-\alpha_2\beta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{1-\alpha_n^n\beta_1^n}{1-\alpha_n\beta_1}, & \dfrac{1-\alpha_n^n\beta_2^n}{1-\alpha_n\beta_2}, & \ldots, & \dfrac{1-\alpha_n^n\beta_n^n}{1-\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix}.$$

***294.**
$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1, & \sin(\alpha_1+\alpha_2), & \ldots, & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1), & \sin 2\alpha_2, & \ldots, & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1), & \sin(\alpha_n+\alpha_2), & \ldots, & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}.$$

***295.**
$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_{n-1}, & 1 \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, & s_n, & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \ldots, & s_{2n-2}, & x^{n-1} \\ s_n, & s_{n+1}, & s_{n+2}, & \ldots, & s_{2n-1}, & x^n \end{vmatrix},$$

unde $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.

***296.**
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & l & m & n & p \\ b & -a & -d & c & m & -l & p & -n \\ c & d & -a & -b & n & -p & -l & m \\ d & -c & b & -a & p & n & -m & -l \\ l & -m & -n & -p & -a & b & c & d \\ m & l & p & -n & -b & -a & d & -c \\ n & -p & l & m & -c & -d & -a & b \\ p & n & -m & l & -d & c & -b & -a \end{vmatrix}$$

***297.**
$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 2\cos 2\varphi & 2\sin 2\varphi \\ \cos 3\varphi & \sin 3\varphi & 3\cos 3\varphi & 3\sin 3\varphi \\ \cos 4\varphi & \sin 4\varphi & 4\cos 4\varphi & 4\sin 4\varphi \end{vmatrix}$$

***298.**
$$\begin{vmatrix} \cos n\varphi & n\cos n\varphi & \sin n\varphi & n\sin n\varphi \\ \cos(n+1)\varphi & (n+1)\cos(n+1)\varphi & \sin(n+1)\varphi & (n+1)\sin(n+1)\varphi \\ \cos(n+2)\varphi & (n+2)\cos(n+2)\varphi & \sin(n+2)\varphi & (n+2)\sin(n+2)\varphi \\ \cos(n+3)\varphi & (n+3)\cos(n+3)\varphi & \sin(n+3)\varphi & (n+3)\sin(n+3)\varphi \end{vmatrix}$$

***299.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

***300.**
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$
(determinant ciclic).

301. Să se aplice rezultatul problemei 300 la calcularea determinantului
$$\begin{vmatrix} x & u & z & y \\ y & x & u & z \\ z & y & x & u \\ u & z & y & x \end{vmatrix}.$$

302. Să se aplice rezultatul problemei 300 la problemele 192, 205, 255.

303.
$$\begin{vmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & 1 \\ 1 & 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2} \\ C_{n-1}^{n-2} & 1 & 1 & \dots & C_{n-1}^{n-4} & C_{n-1}^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

304.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \dots & (n-1)\,a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a & 3a^2 & 4a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

305.
$$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \dots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \dots & s-a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s-a_2 & s-a_3 & \dots & s-a_1 \end{vmatrix},$$

unde $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

306.
$$\begin{vmatrix} t^{n-1} & C_n^1 t^{n-2} & C_n^2 t^{n-3} & \dots & C_n^{n-2} t & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & t^{n-1} & C_n^1 t^{n-2} & \dots & C_n^{n-3} t^2 & C_n^{n-2} t \\ C_n^{n-2} t & C_n^{n-1} & t^{n-1} & \dots & C_n^{n-4} t^3 & C_n^{n-3} t^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^1 t^{n-2} & C_n^2 t^{n-3} & C_n^3 t^{n-4} & \dots & C_n^{n-1} & t^{n-1} \end{vmatrix}.$$

307.
$$\begin{vmatrix} \overbrace{-1 & -1 & \dots & -1}^{p} & -1 & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^{n-p} \\ 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

***308.**
$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \dots & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \dots & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \dots & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \dots & \cos\frac{\pi}{n} \end{vmatrix}.$$

309.
$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \dots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \dots & \cos(n-1)\theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \dots & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

310.
$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \dots & \sin[a+(n-1)h] \\ \sin[a+(n-1)h] & \sin a & \sin(a+h) & \dots & \sin[a+(n-2h] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \sin(a+3h) & \dots & \sin a \end{vmatrix}.$$

***311.**
$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & 1^2 \end{vmatrix}.$$

312. Să se demonstreze că

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0+3a_1+3a_2)(a_0^2-a_0a_1-a_0a_2+2a_1^2+2a_2^2-3a_1a_2)^3.$$

313.
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

(determinant ciclic strîmb).

***314.** Să se demonstreze că un determinant ciclic de ordinul $2n$ poate fi reprezentat ca produsul dintre un determinant ciclic de ordinul n și un determinant ciclic strîmb de ordinul n.

315.
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \mu a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \mu a_{n-1} & \mu a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mu a_2 & \mu a_3 & \mu a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

§ 7. Probleme diverse

316. Dacă

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$ atunci

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

317. Să se demonstreze că

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ x \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ik},$$

unde A_{ik} este complementul algebric al elementului a_{ik}.

318. Folosind rezultatul problemei 317, să se calculeze determinanții din problemele: 200, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 232, 233, 248, 249, 250.

319. Să se demonstreze că suma complementilor algebrici ai tuturor elementelor determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

este egală cu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \dots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

320. Suma complementilor algebrici a tuturor elementelor unui determinant nu se schimbă, dacă adăugăm la toate elementele determinantului unul și același număr.

321. Dacă toate elementele unei linii (coloane) a unui determinant sunt egale cu 1, atunci suma complementilor algebrici ai tuturor elelementelor determinantului este egală cu valoarea determinantului.

322. Să se calculeze suma complementilor algebrici a tuturor elementilor determinantului din problema 250.

***323.** Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \dots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

324. Notînd cu P_n și Q_n determinanții

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \text{ și } \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

să se demonstreze că

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}.$$

Să se calculeze determinanții

***325.**
$$\begin{vmatrix} c & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & c & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c \end{vmatrix}$$

326.
$$\begin{vmatrix} p & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & p & q & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & q \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p \end{vmatrix}$$

***327.** Să se reprezinte determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

sub forma unui polinom ordonat după puterile lui x.

***328.** Să se calculeze determinantul de ordinul $2n-1$, avînd primele $n-1$ elemente de pe diagonala principală egale cu 1, iar celelalte elemente de pe diagonala principală egale cu n. In primele $n-1$ linii n elemente situate la dreapta diagonalei principale sînt egale cu 1, iar în ultimele n linii elementele care se află la stînga diagonalei principale sînt $n-1$, $n-2$, ..., 1. Celelalte elemente ale determinantului sînt egale cu zero.

De exemplu,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

***329.** Să se calculeze determinanţii

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n & x-2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x-4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x-2n \end{vmatrix}.$$

330.
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

331.
$$\begin{vmatrix} x & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n(a-1) & x-1 & 2a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (n-1)(a-1) & x-2 & 3a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a-1 & x-n \end{vmatrix}.$$

332.
$$\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

333.
$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

334. Să se afle coeficientul termenului de gradul cel mai mic în raport cu x, din determinantul

$$\begin{vmatrix} (1+x)^{a_1b_1} & (1+x)^{a_1b_2} & \dots & (1+x)^{a_1b_n} \\ (1+x)^{a_2b_1} & (1+x)^{a_2b_2} & \dots & (1+x)^{a_2b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1+x)^{a_nb_1} & (1+x)^{a_nb_2} & \dots & (1+x)^{a_nb_n} \end{vmatrix}.$$

CAPITOLUL III

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

§ 1. Teorema lui Cramer

Să se rezolve sistemele de ecuații

335.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$$

336.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2. \end{aligned}$$

337.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11. \end{aligned}$$

338.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}$$

339.

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+2x_3+3x_4&=1,\\ 3x_1-\ x_2-\ x_3-2x_4&=-4,\\ 2x_1+3x_2-\ x_3-\ x_4&=-6,\\ x_1+2x_2+3x_3-\ x_4&=-4. \end{aligned}$$

340.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-2x_4&=6,\\ 2x_1-\ x_2-2x_3-3x_4&=8,\\ 3x_1+2x_2-\ x_3+2x_4&=4,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+\ x_4&=-8. \end{aligned}$$

341.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5,\\ 2x_1+\ x_2+2x_3+3x_4&=1,\\ 3x_1+2x_2+\ x_3+2x_4&=1,\\ 4x_1+3x_2+2x_3+\ x_4&=-5. \end{aligned}$$

342.

$$\begin{aligned} x_2-3x_3+4x_4&=-5,\\ x_1\quad -2x_3+3x_4&=-4,\\ 3x_1+2x_2\quad -5x_4&=12,\\ 4x_1+3x_2-5x_3\quad &=5. \end{aligned}$$

343.

$$\begin{aligned} 2x_1-\ x_2+3x_3+2x_4&=4,\\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4&=6,\\ 3x_1-\ x_2-\ x_3+2x_4&=6,\\ 3x_1-\ x_2+3x_3-\ x_4&=6. \end{aligned}$$

344.

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4&=0,\\ x_1+2x_2+\ 3x_3+\ 4x_4&=0,\\ x_1+3x_2+\ 6x_3+10x_4&=0,\\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4&=0. \end{aligned}$$

345.

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3+7x_4&=12,\\ 3x_1+5x_2+7x_3+\ x_4&=0,\\ 5x_1+7x_2+\ x_3+3x_4&=4,\\ 7x_1+\ x_2+3x_3+5x_4&=16. \end{aligned}$$

346.

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5&=0,\\ x_1-x_2+\ 2x_3-\ 2x_4+\ 3x_5&=0,\\ x_1+x_2+\ 4x_3+\ 4x_4+\ 9x_5&=0,\\ x_1-x_2+\ 8x_3-\ 8x_4+27x_5&=0,\\ x_1+x_2+16x_3+16x_4+81x_5&=0. \end{aligned}$$

347

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0,\\ x_1+\ x_2+2x_3+3x_4&=0,\\ x_1+5x_2+\ x_3+2x_4&=0,\\ x_1+5x_2+5x_3+2x_4&=0. \end{aligned}$$

348.

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4\quad &=0,\\ x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5&=0,\\ x_1+2x_2+3x_3\quad &=2,\\ x_2+2x_3+3x_4\quad &=-2,\\ x_3+2x_4+3x_5&=2. \end{aligned}$$

349.

$$\begin{aligned} x_1+4x_2+6x_3+4x_4+\ x_5&=0,\\ x_1+\ x_2+4x_3+6x_4+4x_5&=0,\\ 4x_1+\ x_2+\ x_3+4x_4+6x_5&=0,\\ 6x_1+4x_2+\ x_3+\ x_4+4x_5&=0,\\ 4x_1+6x_2+4x_3+\ x_4+\ x_5&=0. \end{aligned}$$

350.

$$\begin{aligned} 2x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5&=2,\\ x_1+2x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5&=0,\\ x_1+\ x_2+3x_3+\ x_4+\ x_5&=3,\\ x_1+\ x_2+\ x_3+4x_4+\ x_5&=-2,\\ x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4+5x_5&=5. \end{aligned}$$

351.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=13,\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=10,\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=11,\\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5&=6,\\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5&=3. \end{aligned}$$

352.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5&=-1,\\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5&=8,\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5&=3,\\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5&=-2,\\ x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5&=-3. \end{aligned}$$

353.
$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+4x_3-3x_4&=0,\\ 3x_1-x_2+11x_3-13x_4&=0,\\ 4x_1+5x_2-7x_3-2x_4&=0,\\ 13x_1-25x_2+x_3+11x_4&=0. \end{aligned}$$

Să se verifice că sistemul are soluția $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ și să se calculeze determinantul sistemului.

354. Să se demonstreze că sistemul
$$\begin{aligned} ax+by+cz+dt&=0,\\ bx-ay+dz-ct&=0,\\ cx-dy-az+bt&=0,\\ dx+cy-bz-at&=0 \end{aligned}$$
admite o soluție unică, dacă a, b, c, d, sînt numere reale, nu toate nule.

355.
$$\begin{aligned} \alpha x_1+\alpha x_2+\ \dots\ +\alpha x_{n-1}+\beta x_n&=a_n\\ \alpha x_1+\alpha x_2+\ \dots\ +\beta x_{n-1}+\alpha x_n&=a_{n-1},\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots&\\ \beta x_1+\alpha x_2+\ \dots\ +\alpha x_{n-1}+\alpha x_n&=a_1, \end{aligned}$$
unde $\alpha\neq\beta$.

356.
$$\begin{aligned} \frac{x_1}{b_1-\beta_1}+\frac{x_2}{b_1-\beta_2}+\dots+\frac{x_n}{b_1-\beta_n}&=1,\\ \frac{x_1}{b_2-\beta_1}+\frac{x_2}{b_2-\beta_2}+\dots+\frac{x_n}{b_2-\beta_n}&=1,\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots&\\ \frac{x_1}{b_n-\beta_1}+\frac{x_2}{b_n-\beta_2}+\dots+\frac{x_n}{b_n-\beta_n}&=1, \end{aligned}$$
unde $b_1, b_2, \dots, b_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sînt toate distincte.

357.
$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ \cdots &+ x_n &&= 1,\\ \alpha_1 x_1 &+ \alpha_2 x_2 &+ \cdots &+ \alpha_n x_n &&= t,\\ \cdot &\quad \cdot &\quad \cdots &\quad \cdot &\quad \cdot\\ \cdot &\quad \cdot &\quad \cdots &\quad \cdot &\quad \cdot\\ \alpha_1^{n-1} x_1 &+ \alpha_2^{n-1} x_2 &+ \cdots &+ \alpha_n^{n-1} x_n &&= t^{n-1}, \end{aligned}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt distincte.

358.
$$\begin{aligned} x_1 + \alpha_1 x_2 + \ldots + \alpha_1^{n-1} x_n &= u_1,\\ x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_2^{n-1} x_n &= u_2,\\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\ x_1 + \alpha_n x_2 + \ldots + \alpha_n^{n-1} x_n &= u_n, \end{aligned}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt distincte.

359.
$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ \ldots &+ x_n &&= u_1,\\ \alpha_1 x_1 &+ \alpha_2 x_2 &+ \ldots &+ \alpha_n x_n &&= u_2,\\ \cdot &\quad \cdot &\quad \ldots &\quad \cdot &\quad \cdot\\ \cdot &\quad \cdot &\quad \ldots &\quad \cdot &\quad \cdot\\ \alpha_1^{n-1} x_1 &+ \alpha_2^{n-1} x_2 &+ \ldots &+ \alpha_n^{n-1} x_n &&= u_n, \end{aligned}$$

în care $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_n$ sînt distincte.

360.
$$\begin{aligned} 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 0,\\ 1 + 2x_1 + 2^2 x_2 + \ldots + 2^n x_n &= 0,\\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \cdot\\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \cdot\\ 1 + nx_1 + n^2 x_2 + \ldots + n^n x_n &= 0. \end{aligned}$$

§ 2. Rangul unei matrice

361. Cîți determinanți de ordinul k putem forma dintr-o matrice cu m linii și n coloane?

362. Să se formeze o matrice al cărei rang să fie egal cu: a) 2; b) 3.

363. Să se demonstreze că rangul unei matrice nu se schimbă dacă:

a) se înlocuiesc liniile prin coloane;

b) elementele unei linii sau ale unei coloane se înmulțesc cu un număr diferit de zero;

c) se permută două linii sau două coloane;

d) la elementele unei linii (coloane) se adună elementele unei alte linii (coloane), înmulțite cu același număr.

364. Se numește sumă a două matrice cu același număr de linii și de coloane matricea ale cărei elemente reprezintă sumele elementelor corespunzătoare ale celor două matrice adunate. Să se demonstreze că rangul sumei a două matrice nu depășește suma rangurilor termenilor.

365. Cum se poate schimba rangul unei matrice, dacă adăugăm la ea a) o coloană; b) două coloane?

Să se calculeze rangul matricelor

366.

$$\begin{pmatrix} 0, & 4, & 10, & 1 \\ 4, & 8, & 18, & 7 \\ 10, & 18, & 40, & 17 \\ 1, & 7, & 17, & 3 \end{pmatrix}.$$

367.

$$\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}.$$

368.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

369.

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

370.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

371.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

372.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

373.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

374.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

375. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

376. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

377. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

378. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

379. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

380. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

§ 3. Sisteme de forme liniare

381. a) Să se scrie două forme liniare independente;
b) Să se scrie trei forme liniare independente.

382. Să se alcătuiască un sistem de patru forme liniare de cinci variabile, astfel încît două dintre ele să fie independente, iar celelalte să reprezinte combinații liniare ale primelor.

Să se determine legăturile dintre următoarele forme liniare:

383.

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4, \\ y_2 &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4, \\ y_3 &= x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4. \end{aligned}$$

384.

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4, \\ y_2 &= 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4, \\ y_3 &= 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4. \end{aligned}$$

385.

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4, \\ y_2 &= x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4, \\ y_3 &= 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 8x_4, \\ y_4 &= 3x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 5x_4. \end{aligned}$$

386.

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4, \\ y_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4. \end{aligned}$$

387.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2+3x_3+ x_4,\\ y_2 &= 2x_1+3x_2+ x_3+2x_4,\\ y_3 &= 3x_1+ x_2+2x_3-2x_4,\\ y_4 &= 4x_2+2x_3+5x_4, \end{aligned}$$

388.

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+ x_2,\\ y_2 &= 3x_1+2x_2,\\ y_3 &= x_1+ x_2,\\ y_4 &= 2x_1+3x_2. \end{aligned}$$

389.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+ x_2+ x_3+ x_4+x_5,\\ y_2 &= x_1+2x_2+ 3x_3+ 4x_4+x_5,\\ y_3 &= x_1+3x_2+ 6x_3+10x_4+x_5,\\ y_4 &= x_1+4x_2+10x_3+20x_4+x_5. \end{aligned}$$

390.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2+3x_3-4x_4,\\ y_2 &= 2x_1- x_2+2x_3+5x_4,\\ y_3 &= 2x_1- x_2+5x_3-4x_4,\\ y_4 &= 2x_1+3x_2-4x_3+ x_4. \end{aligned}$$

391.

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+ x_2-3x_3,\\ y_2 &= 3x_1+ x_2-5x_3,\\ y_3 &= 4x_1+2x_2- x_3,\\ y_4 &= x_1 \quad -7x_3. \end{aligned}$$

392.

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+3x_2+5x_3- 4x_4+ x_5,\\ y_2 &= x_1- x_2+2x_3+ 3x_4+5x_5,\\ y_3 &= 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5,\\ y_4 &= x_1- x_2+ x_3- 2x_4+3x_5. \end{aligned}$$

393.

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1- x_2+ 3x_3+ 4x_4- x_5,\\ y_2 &= x_1+2x_2- 3x_3+ x_4+2x_5,\\ y_3 &= 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4-5x_5,\\ y_4 &= x_1-3x_2+ 6x_3+ 3x_4-3x_5. \end{aligned}$$

394.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2+ x_3-2x_4+ x_5,\\ y_2 &= 2x_1- x_2+ x_3+3x_4+2x_5,\\ y_3 &= x_1- x_2+2x_3- x_4+3x_5,\\ y_4 &= 2x_1+ x_2-3x_3+ x_4-2x_5,\\ y_5 &= x_1- x_2+3x_3- x_4+7x_5. \end{aligned}$$

395.

$$\begin{aligned} y_1 &= 4x_1+3x_2- x_3+ x_4- x_5,\\ y_2 &= 2x_1+ x_2-3x_3+2x_4-5x_5,\\ y_3 &= x_1-3x_2 \quad + x_4-2x_5,\\ y_4 &= x_1+5x_2+2x_3-2x_4+6x_5. \end{aligned}$$

396.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2- x_3+ 3x_4- x_5+2x_6,\\ y_2 &= 2x_1- x_2+3x_3- 4x_4+ x_5- x_6,\\ y_3 &= 3x_1+ x_2- x_3+ 2x_4+ x_5+3x_6,\\ y_4 &= 4x_1-7x_2+8x_3-15x_4+6x_5-5x_6,\\ y_5 &= 5x_1+5x_2-6x_3+11x_4 \quad +9x_6. \end{aligned}$$

397.
$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2+x_3-3x_4+2x_5,\\ y_2 &= 2x_1+x_2+x_3+x_4-3x_5,\\ y_3 &= x_1+x_2+2x_3+2x_4-2x_5,\\ y_4 &= 2x_1+3x_2-5x_3-17x_4+\lambda x_5. \end{aligned}$$

Să se aleagă λ astfel, încît forma a patra să fie o combinație liniară a primelor trei.

§ 4. Sisteme de ecuații liniare

398. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4&=1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4&=-1,\\ x_1-2x_2+x_3+5x_4&=5. \end{aligned}$$

399. Să se aleagă λ astfel, încît sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3+x_4&=1,\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4&=2,\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4&=\lambda. \end{aligned}$$

Să aibă, soluție.

Să se rezolve sistemele de ecuații:

400.
$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3&=-1,\\ 2x_1+x_2-2x_3&=1,\\ x_1+x_2+x_3&=3,\\ x_1+2x_2-3x_3&=1. \end{aligned}$$

401.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=2,\\ x_1+3x_2+x_3&=5,\\ x_1+x_2+5x_3&=-7,\\ 2x_1+3x_2-3x_3&=14. \end{aligned}$$

402.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3&=3,\\ 3x_1+x_2-5x_3&=0,\\ 4x_1-x_2+x_3&=3,\\ x_1+3x_2-13x_3&=-6. \end{aligned}$$

403.
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3&=0,\\ 2x_1-x_2+3x_3&=0,\\ 3x_1-5x_2+4x_3&=0,\\ x_1+17x_2+4x_3&=0. \end{aligned}$$

404.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4&=1,\\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4&=2,\\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4&=-1,\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4&=4. \end{aligned}$$

405.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1,\\ 2x_1-x_2-3x_4&=2,\\ 3x_1-x_3+x_4&=-3,\\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4&=-6. \end{aligned}$$

406.
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-4x_4&=4,\\ x_2-x_3+x_4&=-3,\\ x_1+3x_2-3x_4&=1,\\ -7x_2+3x_3+x_4&=-3. \end{aligned}$$

407.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=11,\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4&=12,\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4&=13,\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4&=14. \end{aligned}$$

408.

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-\ x_3+5x_4&=0,\\ 3x_1-\ x_2+2x_3-7x_4&=0,\\ 4x_1+\ x_2-3x_3+6x_4&=0,\\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4&=0. \end{aligned}$$

409.

$$\begin{aligned} 3x_1+\ 4x_2-\ 5x_3+\ 7x_4&=0,\\ 2x_1-\ 3x_2+\ 3x_3-\ 2x_4&=0,\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4&=0,\\ 7x_1-\ 2x_2+\ \ x_3+\ 3x_4&=0. \end{aligned}$$

410.

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2\ \ \ \ -3x_4-\ x_5&=0,\\ x_1-\ x_2+2x_3-\ x_4\ \ \ \ &=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5&=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5&=0. \end{aligned}$$

411.

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5&=7,\\ 3x_1+2x_2+\ x_3+\ x_4-3x_5&=-2,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5&=23,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-\ x_5&=12. \end{aligned}$$

412.

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-\ x_4+\ x_5&=0,\\ 2x_1+\ x_2-x_3+2x_4-3x_5&=0,\\ 3x_1-2x_2-x_3+\ x_4-2x_5&=0,\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5&=0. \end{aligned}$$

413.

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+\ x_3+\ x_4-\ x_5&=0,\\ 2x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4+\ x_5&=0,\\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5&=0,\\ 3x_1-\ x_2-2x_3+\ x_4-\ x_5&=0. \end{aligned}$$

414.

$$\begin{aligned} 2x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4+\ x_5&=1,\\ x_1-\ x_2+\ x_3+\ x_4-2x_5&=0,\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5&=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5&=3. \end{aligned}$$

415.

$$\begin{aligned} 2x_1-\ 2x_2+\ x_3-\ x_4+\ \ x_5&=1,\\ x_1+\ 2x_2-\ x_3+\ x_4-\ 2x_5&=1,\\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+\ 7x_5&=1,\\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5&=-1. \end{aligned}$$

416.

$$\begin{aligned} 3x_1+\ x_2-2x_3+\ x_4-\ x_5&=1,\\ 2x_1-\ x_2+7x_3-3x_4+5x_5&=2,\\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5&=3,\\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5&=3. \end{aligned}$$

417.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2\ \ \ \ -\ 3x_4+2x_5&=1,\\ x_1-\ x_2-3x_3+\ \ x_4-3x_5&=2,\\ 2x_1-3x_2+4x_3-\ 5x_4+2x_5&=7,\\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5&=25 \end{aligned}$$

418.
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 &= 1,\\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5 &= -1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5 &= 3,\\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5 &= 3,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5 &= -1. \end{aligned}$$

419.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-x_4 &= 1,\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4 &= 1,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4 &= 1,\\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4 &= 1,\\ 5x_1+5x_2+2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

420.
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5 &= -2,\\ x_1+2x_2-x_3-x_5 &= -3,\\ x_1-x_2+2x_3-3x_4 &= 10,\\ x_2-x_3+x_4-2x_5 &= -5,\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4+4x_5 &= 1. \end{aligned}$$

421. Sistemul
$$\begin{aligned} ay+bx &= c,\\ cx+az &= b,\\ bz+cy &= a \end{aligned}$$
are o soluție unică. Să se demonstreze că $abc \neq 0$ și să se găsească soluția.

Să se rezolve și discute sistemele de ecuații:

422.
$$\begin{aligned} \lambda x+y+z &= 1,\\ x+\lambda y+z &= \lambda,\\ x+y+\lambda z &= \lambda^2. \end{aligned}$$

423.
$$\begin{aligned} \lambda x+y+z+t &= 1,\\ x+\lambda y+z+t &= \lambda,\\ x+y+\lambda z+t &= \lambda^2,\\ x+y+z+\lambda t &= \lambda^3. \end{aligned}$$

424.
$$\begin{aligned} x+ay+a^2z &= a^3,\\ x+by+b^2z &= b^3,\\ x+cy+c^2z &= c^3. \end{aligned}$$

425.
$$\begin{aligned} x+y+z &= 1,\\ ax+by+cz &= d,\\ a^2x+b^2y+c^2z &= d^2. \end{aligned}$$

426.
$$\begin{aligned} ax+y+z &= 4,\\ x+by+z &= 3,\\ x+2by+z &= 4. \end{aligned}$$

427.
$$\begin{aligned} ax+by+z &= 1,\\ x+aby+z &= b,\\ x+by+az &= 1. \end{aligned}$$

428.
$$\begin{aligned} \alpha x+y+z &= m,\\ x+\alpha y+z &= n,\\ x+y+\alpha z &= p. \end{aligned}$$

429.
$$\begin{aligned} x+ay+a^2z &= 1,\\ x+ay+abz &= a,\\ bz+a^2y+a^2bz &= a^2b. \end{aligned}$$

430.
$$\begin{aligned} (\lambda+3)x+y+2z &= \lambda,\\ \lambda x+(\lambda-1)y+z &= 2\lambda,\\ 3(\lambda+1)x+\lambda y+(\lambda+3)z &= 3. \end{aligned}$$

432.
$$\begin{aligned} \lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z &= \lambda,\\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z &= \lambda,\\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z &= 1. \end{aligned}$$

432.
$$\begin{aligned} 3kx+(2k+1)y+(k+1)z &= k,\\ (2k-1)x+(2k-1)y+(k-2)z &= k+1,\\ (4k-1)x+3ky+2kz &= 1. \end{aligned}$$

433. $ax+ by+ 2z=1,$
$ax+(2b-1)y+ 3z=1,$
$ax+ by+(b+3)z=2b-1.$

434. a) $3mx+(3m-7)y+ (m-5)z=m-1,$
$(2m-1)x+(4m-1)y+ 2mz=m+1,$
$4mx+(5m-7)y+(2m-5)z=0.$

b) $(2m+1)x- my+ (m+1)z=m-1,$
$(m-2)x+ (m-1)y+ (m-2)z=m,$
$(2m-1)x+ (m-1)y+(2m-1)z=m.$

c) $(5\lambda+1)x+ 2\lambda y+(4\lambda+1)z=1+\lambda,$
$(4\lambda-1)x+ (\lambda-1)y+(4\lambda-1)z=-1,$
$2(3\lambda+1)x+ 2\lambda y+(5\lambda+2)z=2-\lambda.$

435. a) $(2c+1)x- cy- (c+1)z=2c,$
$3cx - (2c-1)y-(3c-1)z=c+1,$
$(c+2)x- y- 2cz=2.$

b) $(2\lambda+1)x+ 3y+ \lambda z= \lambda+4,$
$(4\lambda-1)x+ (\lambda+1)y+(2\lambda-1)z=2\lambda+2,$
$(5\lambda-4)x+ (\lambda+1)y+(3\lambda-4)z= \lambda-1.$

c) $dx+(2d-1)y+ (d+2)z=1,$
$(d-1)y+ (d-3)z=1+d,$
$dx+(3d-2)y+(3d+1)z=2-d.$

d) $(3a-1)x+ 2ay+(3a+1)z=1,$
$2ax+ 2ay+(3a+1)z=a,$
$(a+1)x+ (a+1)y+2(a+1)z=a^2.$

436. Să se găsească ecuația dreptei care trece prin punctele $M_1(x_1,y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$.

437. Care este condiția ca trei puncte $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ să fie situate pe aceeași dreaptă?

438. Care este condiția ca trei drepte $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$; $a_3x+b_3y+c_3=0$ să treacă prin același punct?

439. Care este condiția ca patru puncte $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ să se afle pe un cerc?

440. Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele $M_1(2,1)$; $M_2(1, 2)$; $M_3(0,1)$.

441. Să se găsească ecuația conicei care trece prin punctele $M_1(0, 0)$; $M_2(1, 0)$; $M_3(-1, 0)$; $M_4(1, 1)$ și $M_5(-1, 1)$.

442. Să se găsească ecuația parabolei cubice care trece prin punctele $M_1(1, 0)$; $M_2(0,-1)$; $M_3(-1,-2)$ și $M_4(2, 7)$.

443. Să se formeze ecuația unei parabole de gradul n: $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, care trece prin $n+1$ puncte date: $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; ...; $M_n(x_n, y_n)$.

444. Care este condiția ca patru puncte $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$; $M_4(x_4, y_4, z_4)$ să fie coplanare?

445. Să se scrie ecuația sferei care trece prin punctele $M_1(1, 0, 0)$; $M_2(1, 1, 0)$; $M_3(1, 1, 1)$; $M_4(0, 1, 1)$.

446. Care este condiția ca n puncte $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$; ...; $M_n(x_n, y_n)$ să fie coliniare?

447. Care este condiția ca n drepte $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$; ...; $a_nx+b_ny+c_n=0$ să fie concurente?

448. Care este condiția ca n puncte $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; ...; $M_n(x_n, y_n, z_n)$ să fie situate în același plan și care este condiția ca aceste puncte să fie situate pe aceeași dreaptă?

449. Care este condiția ca n plane $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ să treacă prin același punct și care este condiția ca toate aceste plane să treacă prin aceeași dreaptă?

450. Să se elimine $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ din sistemul de n ecuații:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,n-1}x_{n-1}+a_{1n}=0,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2,n-1}x_{n-1}+a_{2n}=0,\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{n,n-1}x_{n-1}+a_{nn}=0.
\end{aligned}$$

451. Fie

$$\left.\begin{array}{llll}
x_1^{(1)}=\alpha_{11}; & x_2^{(1)}=\alpha_{12}; & \ldots; & x_n^{(1)}=\alpha_{1n},\\
x_1^{(2)}=\alpha_{21}; & x_2^{(2)}=\alpha_{22}; & \ldots; & x_n^{(2)}=\alpha_{2n},\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
x_1^{(m)}=\alpha_{m1}; & x_2^{(m)}=\alpha_{m2}; & \ldots; & x_n^{(m)}=\alpha_{mn}
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

m soluții ale unui sistem de ecuații liniare omogene. Aceste soluții se numesc liniar dependente, dacă există m constante $c_1, c_2, \ldots, c_m$, nu toate nule, astfel încît

$$c_1\alpha_{1i}+c_2\alpha_{2i}+\ldots+c_m\alpha_{mi}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Dacă relațiile (2) sînt posibile numai pentru $c_1=c_2=\ldots=c_m=0$, atunci soluțiile se numesc liniar independente.

Vom conveni să scriem soluțiile ca linii ale unei matrice. Astfel, sistemul de soluții (1) se va scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

Să se demonstreze că dacă rangul matricei A este r, atunci în sistemul (1) există r soluții liniar independente, iar toate celelalte soluții ale sistemului (1) reprezintă combinații liniare ale acestora.

452. Dacă rangul unui sistem de m ecuații liniare omogene cu n necunoscute este egal cu r, atunci există $n-r$ soluții liniar independente, iar toate celelalte soluții ale sistemului sunt combinații liniare ale acestora.

Un asemenea sistem de $n-r$ soluții se numește sistem fundamental de soluții.

453. Să se stabilească dacă sistemul

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

este sau nu un sistem fundamental de soluții al sistemului de ecuații

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0\,? \end{aligned}$$

454. Să se scrie un sistem fundamental de soluții pentru sistemul de ecuații din problema 453.

455. Să se stabilească dacă sistemul

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

reprezintă sau nu un sistem fundamental de soluții al sistemului de ecuații din problema 453.

456. Să se demonstreze că dacă A este o matrice de rang r care formează un sistem fundamental de soluții al unui sistem de ecuații liniare și omogene, iar B este o matrice nesingulară arbitrară de ordinul r, atunci matricea BA formează, de asemenea, un sistem fundamental de soluții pentru același sistem de ecuații.

457. Să se demonstreze că dacă două matrice A și C, de rang r, formează sisteme fundamentale de soluții pentru un sistem de ecuații liniare și omogene, atunci una dintre ele este produsul dintre cealaltă și o matrice nesingulară B de ordinul r, adică $A=BC$.

458. Fie

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn} \end{pmatrix}$$

un sistem fundamental de soluții pentru un sistem de ecuații liniare și omogene; să se demonstreze că

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21} + \dots + c_r\alpha_{r1}, \\ x_2 &= c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{22} + \dots + c_r\alpha_{r2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_1\alpha_{1n} + c_2\alpha_{2n} + \dots + c_r\alpha_{rn} \end{aligned}$$

reprezintă soluția generală a acestui sistem de ecuații, adică orice soluție a sistemului poate fi obținută din ea dînd anumite valori lui $c_1, c_2, \dots, c_r$, și reciproc.

459. Să se scrie soluția generală a sistemului din problema 453.

460. Să se verifice că (11,1—7) este un sistem fundamental de soluții al sistemului din problema 403 și să se scrie soluția generală.

461. Să se scrie soluția generală a sistemelor din problemele 408, 409, 410, 412, 413.

462. Cunoscînd soluția generală a sistemului din problema 453 (v. răspunsul problemei 459) și știind că $x_1=-16$; $x_2=23$; $x_3=x_4=x_5=0$ este o soluție particulară a sistemului din problema 411, să se găsească soluția generală a sistemului 411.

463. Să se scrie soluția generală a sistemelor din problemele 406, 414, 415.

CAPITOLUL IV

MATRICE

§ 1. Operații cu matrice pătrate

464. Să se înmulțească matricele

a) $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3, & 5 \\ 6, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -3, & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3, & 1, & 1 \\ 2, & 1, & 2 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & 1 \\ 1, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 4, & 6 \\ 3, & 6, & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1, & -2, & -4 \\ -1, & -2, & -4 \\ 1, & 2, & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2, & 3, & 1 \\ -1, & 1, & 0 \\ 1, & 2, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ c, & b, & a \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & a, & c \\ 1, & b, & b \\ 1, & c, & a \end{pmatrix}$

465. Să se efectueze operațiile

a) $\begin{pmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 3, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2 \end{pmatrix}^2$; b) $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}^3$; c) $\begin{pmatrix} 3, & 2 \\ -4, & -2 \end{pmatrix}^5$;

d) $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}^n$; e) $\begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

***466.** Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1, & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n}, & 1 \end{pmatrix}^n$, α fiind un număr real.

467. Să se demonstreze că dacă $AB = BA$, atunci

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

b) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$,

c) $(A + B)^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n-1} B + \ldots + B^n$.

468. Să se calculeze $AB - BA$, dacă

a) $A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 2, & 1, & 2 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4, & 1, & 1 \\ -4, & 2, & 0 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 2 \\ -1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 4 \\ -3, & 5, & -1 \end{pmatrix}$.

469. Să se afle toate matricele comutative cu matricea A, în următoarele cazuri:

a) $A = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ -1, & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix}$.

470. Să se afle $f(A)$, cînd

a) $f(x) = x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 3, & 1, & 2 \\ 1, & -1, & 0 \end{pmatrix}$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ -3, & 3 \end{pmatrix}$.

471. Să se demonstreze că orice matrice de ordinul al doilea $A = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$, verifică ecuația

$$x^2 - (a + d)\,x + (ad - bc) = 0.$$

472. Să se demonstreze că pentru orice matrice dată A se poate găsi un polinom $f(x)$, astfel încît $f(A) = 0$ și că toate polinoamele care se bucură de această proprietate sînt divizibile printr-unul dintre ele.

***473.** Să se demonstreze că egalitatea $AB - BA = E$ este imposibilă.

474. Fie A o matrice, astfel încît $A^k = 0$. Să se demonstreze că $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$.

475. Să se afle toate matricele de ordinul al doilea ale căror pătrate sînt egale cu matricea nulă.

476. Să se afle toate matricele de ordinul al doilea, care, ridicate la cub, dau matricea nulă.

477. Să se afle toate matricele de ordinul al doilea care, ridicate la pătrat, dau matricea unitate.

478. Să se rezolve si să se studieze ecuația $XA = 0$, unde A este o matrice dată, iar X este o matrice necunoscută, ambele fiind de ordinul al doilea.

479. Să se rezolve și să se studieze ecuația $X^2 = A$, unde A este o matrice dată, iar X este o matrice necunoscută, ambele fiind de ordinul al doilea.

480. Să se afle înversa matricei A, în următoarele cazuri:

a) $A = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 5 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1, & 3, & -5, & 7 \\ 0, & 1, & 2, & -3 \\ 0, & 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 2, & 2, & 3 \\ 1, & -1, & 0 \\ -1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$;

f) $A = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 3, & 2, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 3, & 4 \\ 2, & -1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$;

h) $A = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & \ldots, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & 1, & 1, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}$; i) $A = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & \varepsilon, & \varepsilon^2, & \ldots, & \varepsilon^{n-1} \\ 1, & \varepsilon^2, & \varepsilon^4, & \ldots, & \varepsilon^{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \varepsilon^{n-1}, & \varepsilon^{2n-2}, & \ldots, & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$;

unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$;

j) $A = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 0, \ldots, & 0 \\ -1, & 2, & -1, \ldots, & 0 \\ 0, & -1, & 2, \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & -1, 2 \end{pmatrix}$;

k) $A = \begin{pmatrix} 1, & 3, 5, 7, \ldots, 2n-1 \\ 2n-1, & 1, 3, 5, \ldots, 2n-3 \\ 2n-3, & 2n-1, 1, 3, \ldots, 2n-5 \\ 3, & 5, 7, 9, \ldots, 1 \end{pmatrix}$;

l) $A = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & c_1 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & c_2 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, & c_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & c_n \\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots, & b_n, & a \end{pmatrix}$;

m) $A = \begin{pmatrix} 1, & -x, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & -x, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & -x \\ a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \end{pmatrix}$;

n) $A = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\lambda_1}, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 1+\frac{1}{\lambda_2}, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 1, & 1+\frac{1}{\lambda_3}, & \ldots, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1+\frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$;

o) Cunoscînd matricea B^{-1}, să se afle inversa matricei încadrate $\begin{pmatrix} B & U \\ V & a \end{pmatrix}$.

481. Să se afle matricea necunoscută X din ecuațiile

a) $\begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 1, & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4, & -6 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}$;

b) $X \begin{pmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 2, & 1, & 0 \\ 1, & -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 3 \\ 4, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3, & 2 \\ 5, & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2, & 4 \\ 3, & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ -1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 1, & -1, & \ldots, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 2, & -1, & \ldots, & 0 \\ 0, & -1, & 2, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & -1, \ 2 \end{pmatrix};$$

f) $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}$; g) $X \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$.

482. Să se demonstreze că dacă $AB = BA$, atunci $A^{-1} B = BA^{-1}$.

483. Să se calculeze $\varphi(A)$, unde $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $A = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}$.

484. Să se afle toate matricele reale de ordinul al doilea care, ridicate la cub, dau matricea unitate.

485. Să se afle toate matricele reale de ordinul al doilea care, ridicate la puterea a patra, dau matricea unitate.

486. Să se stabilească izomorfismul dintre corpul numerelor complexe și mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a, & b \\ -b, & a \end{pmatrix}$, a, b, fiind numere reale.

487. Să se arate că matricele de forma $\begin{pmatrix} a+bi, & c+di \\ -c+di, & a-bi \end{pmatrix}$, unde a, b, c, d, sînt numere reale, formează un inel fără divizori ai lui zero.

488. Să se reprezinte $(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)$ sub forma sumei a patru pătrate de forme biliniare.

489. Să se demonstreze că următoarele operații efectuate asupra unei matrice:

a) permutarea a două linii;

b) adunarea la elementele unei linii a unor numere proporționale cu elementele unei alte linii;

c) înmulțirea elementelor unei linii cu un număr diferit de zero, — se pot realiza înmulțind matricea la stînga cu matrice nesingulare.

Aceleași operații, efectuate asupra coloanelor, se pot realiza prin înmulțire la dreapta.

490. Să se demonstreze că orice matrice poate fi reprezentată sub forma PRQ, unde P și Q sînt matrice nesingulare, iar matricea R este o matrice diagonală de forma

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

***491.** Să se demonstreze că orice matrice poate fi reprezentată ca produs de matrice de tipul $E + \alpha e_{ik}$, unde e_{ik} este o matrice avînd elementul de pe linia i și de pe coloana k egal cu 1, iar toate celelalte elemente egale cu zero.

***492.** Să se demonstreze că rangul produsului a două matrice pătrate de ordinul n nu este mai mic decît $r_1 + r_2 - n$, unde r_1 și r_2 sînt rangurile factorilor.

493. Să se demonstreze că orice matrice pătrată de rangul întîi este de forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1, & \lambda_1\mu_2, & \ldots, & \lambda_1\mu_n \\ \lambda_2\mu_1, & \lambda_2\mu_2, & \ldots, & \lambda_2\mu_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n\mu_1, & \lambda_n\mu_2, & \ldots, & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

***494.** Să se afle toate matricele de ordinul al treilea care, ridicate la pătrat, dau matricea nulă.

*495. Să se afle toate matricele de ordinul al treilea care, ridicate la pătrat, dau matricea unitate.

*496. Să presupunem că matricele dreptunghiulare A și B au același număr de linii. Vom nota cu (A, B) matricea care se obține dacă adăugăm la matricea A toate coloanele matricei B. Să se demonstreze că rang $(A, B) \leqslant$ rang $A +$ rang B.

*497. Să se demonstreze că dacă $A^2 = E$, atunci rang $(E + A) +$ rang $(E - A) = n$, unde n este ordinul matricei A.

*498. Să se demonstreze că matricea A pentru care $A^2 = E$, se poate reprezenta sub forma PBP^{-1}, unde P este o matrice nesingulară, iar B este o matrice diagonală, avînd toate elementele egale cu ± 1.

499. Să se afle condiția pe care trebuie să o satisfacă o matrice avînd ca elemente numere întregi, pentru ca toate elementele matricei inverse să fie, de asemenea, numere întregi.

*500. Orice matrice nesingulară cu elemente întregi poate fi scrisă sub forma PR, unde P este o matrice unimodulară [1]) cu elemente întregi, iar R este o matrice triunghiulară cu elemente întregi; la care toate elementele situate sub diagonala principală sînt nule, elementele de pe diagonală sînt pozitive, iar elementele situate deasupra diagonalei principale sînt pozitive sau nule și nu depășesc în mărime elementele de pe diagonală, situate pe aceeași coloană.

*501. Să reunim în aceeași clasă toate matricele cu elemente întregi care se pot obține una din alta, prin înmulțire la stînga cu matrice unimodulare cu elemente întregi. Să se stabilească numărul claselor de matrice de ordinul n cu un determinant k dat.

502. Să se demonstreze că orice matrice cu elemente întregi poate fi reprezentată sub forma PRQ, unde P și Q sînt matrice unimodulare cu elemente întregi, iar R este o matrice diagonală cu elemente întregi.

503. Să se demonstreze că orice matrice unimodulară cu elemente întregi de ordinul al doilea, cu determinantul 1, poate fi reprezentată ca produs de puteri (pozitive și negative) ale matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix}.$$

[1]) Adică cu determinantul egal cu ± 1 (N. R).

504. Să se demonstreze că orice matrice unimodulară de ordinul al doilea cu elemente întregi poate fi reprezentată ca produs de puteri ale matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

***505.** Orice matrice de ordinul al treilea cu elemente întregi, diferită de matricea unitate, avînd determinantul pozitiv și satisfăcînd condiția $A^2 = E$ poate fi reprezentată sub forma QCQ^{-1}, unde Q este o matrice unimodulară cu elemente întregi, iar C este una dintre matricele

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Matrice dreptunghiulare. Cîteva inegalități

506. Să se înmulțească matricele:

a) $\begin{pmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 3, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 3, & 1 \\ 2, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ și $(1, 2, 3)$; d) $(1, 2, 3)$ și $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

507. Să se afle determinantul produsului matricei $\begin{pmatrix} 3, 2, 1, 2 \\ 4, 1, 1, 3 \end{pmatrix}$ cu matricea ei transpusă.

508. Să se înmulțească matricea $\begin{pmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{pmatrix}$ cu matricea transpusă și să se aplice teorema referitoare la determinantul produsului.

509. Să se exprime un minor de ordinul m al produsului a două matrice prin minorii factorilor.

510. Să se demonstreze că toți minorii principali (de pe diagonală) ai matricei $\bar{A}A$ sînt pozitivi sau nuli, A fiind o matrice cu elemente reale, iar $\bar{A}$ matricea ei transpusă.

511. Să se demonstreze că dacă toți minorii principali de ordinul k ai matricei $\bar{A}A$ sînt nuli, rangurile matricelor $\bar{A}A$ și A sînt mai mici decît k. Aici A este o matrice reală, iar $\bar{A}$ este transpusa ei.

512. Să se demonstreze că sumele tuturor minorilor diagonali de un ordin k dat, calculate pentru matricele $\bar{A}A$ și $A\bar{A}$, sînt egale.

513. Folosind înmulțirea matricelor dreptunghiulare, să se demonstreze identitatea

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - \\ - (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = \sum_{i<k} (a_ib_k - a_kb_i)^2.$$

514. Să se demonstreze identitatea

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - \left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i' \right|^2 = \sum_{i<k} |a_ib_k - a_kb_i|^2,$$

unde a_i, b_i sînt numere complexe, iar a_i', b_i' sînt conjugatele lor.

515. Să se demonstreze inegalitatea lui Buniakovski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

pentru a_i, b_i reali, pornind de la identitatea din problema 513.

516. Să se demonstreze inegalitatea

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$$

pentru a_i, b_i complecși.

***517.** Fie B și C două matrice dreptunghiulare reale, astfel încît $(B, C) = A$ este o matrice pătrată [semnificația simbolului (BC) este aceeași ca și în problema 496]. Să se demonstreze că $|A|^2 \leqslant |\bar{B}B| \cdot |\bar{C}C|$.

***518.** Fie $A = (B, C)$ o matrice dreptunghiulară cu elemente reale. Să se demonstreze că

$$|\bar{A}A| \leqslant |\bar{B}B| \cdot |\bar{C}C|.$$

519. Fie A o matrice dreptunghiulară reală

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Să se demonstreze că $|A\bar{A}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 \ldots \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^2$.

520. Fie A o matrice dreptunghiulară cu elemente complexe, iar A^* — matricea transpusă a matricei complex conjugate cu A. Să se demonstreze că determinantul matricei A^*A este un număr real, pozitiv, şi că acest determinant este nul atunci şi numai atunci cînd rangul lui A este mai mic decît numărul coloanelor.

521. Fie $A = (B, C)$ o matrice dreptunghiulară complexă. Să se demonstreze că $|A^*A| \leqslant |B^*B| \cdot |C^*C|$.

522. Să se demonstreze că dacă $|a_{ik}| \leqslant M$, modulul determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$ nu depăşeşte $M^n n^{n/2}$.

***523.** Să se demonstreze că dacă numerele a_{ik} sînt reale şi cuprinse în intervalul $0 \leqslant a_{ik} \leqslant M$, atunci valoarea absolută a determinantului format din numerele a_{ik} nu depăşeşte $M^n 2^{-n} (n+1)^{\frac{n+1}{2}}$.

524. Să se demonstreze că pentru determinanţii cu elemente complexe, evaluarea dată la problema 522 este exactă şi nu mai poate fi îmbunătăţită.

525. Să se demonstreze că pentru determinanţii cu elemente reale, evaluarea dată în problema 522 este exactă pentru $n = 2^m$.

526. Să se demonstreze că maximul valorii absolute a determinanţilor de ordinul n cu elemente reale, care nu depăşesc pe 1 în valoare absolută, este un număr întreg divizibil cu 2^{n-1}.

*527. Să se afle maximul valorii absolute a determinanților de ordinul al treilea și al cincilea, formați din numere reale care nu depășesc pe 1 în valoare absolută.

*528. Se numește matrice reciprocă cu o matrice dată A o matrice ale cărei elemente sînt minorii de ordinul $n-1$ ai matricei inițiale, în ordinea lor naturală. Să se demonstreze că matricea reciprocă matricei reciproce este egală cu matricea inițială înmulțită cu determinantul ei la puterea $n-2$.

*529. Să se demonstreze că minorii de ordinul m ai matricei reciproce sînt egali cu minorii complementari ai minorilor corespunzători ai matricei inițiale, înmulțiți cu Δ^{m-1}.

530. Să se demonstreze că matricea reciprocă a produsului a două matrice este egală cu produsul matricelor reciproce în aceeași ordine.

531. Să presupunem că am numerotat într-un mod oarecare toate combinările formate cu numerele $1, 2, \ldots, n$ luate cîte m.

Se dă o matrice pătrată $A = (a_{ik})$ de ordinul n. Fie $A_{\alpha\beta}$ minorul de ordinul m al matricei A, la care numerele liniilor formează combinarea care poartă numărul de ordine α, iar numerele coloanelor, combinarea cu numărul β. Atunci, din acești minori putem construi o matrice $A'_m = (A_{\alpha\beta})$ de ordinul C_n^m. In particular, $A'_1 = A$, A'_{n-1} este reciproca matricei A.

Să se demonstreze că $(AB)'_m = A'_m B'_m$; $E'_m = E$; $(A^{-1})'_m = (A'_m)^{-1}$.

532. Să se demonstreze că dacă A este o matrice *triunghiulară de forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & a_{nn} \end{pmatrix},$$

atunci, printr-o numerotare convenabilă a combinărilor, matricea A'_m poate fi făcută de asemenea triunghiulară.

533. Să se demonstreze că determinantul matricei A'_m este egal cu $|A|^{C_{n-1}^{m-1}}$.

534. Să presupunem că am numerotat într-un anumit mod perechile (i, k); $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$.

Se numește produs kroneckerian al matricelor A și B, avînd respectiv ordinele n și m, matricea $C = A \times B$ de ordinul

mm cu elementele $c_{\alpha_1\alpha_2} = a_{i_1 i_2}\, b_{k_1 k_2}$, unde α_1 este numărul pe care îl poartă perechea (i_1, k_1), iar α_2 este numărul perechii (i_2, k_2).

Să se demonstreze:

a) $(A_1 \pm A_2) \times B = (A_1 \times B) \pm (A_2 \times B)$,

b) $A \times (B_1 \pm B_2) = (A \times B_1) \pm (A \times B_2)$,

c) $(A' \times B') \cdot (A'' \times B'') = (A' \cdot A'') \times (B' \cdot B'')$.

*535. Să se demonstreze că determinantul produsului $A \times B$ este egal cu $|A|^m \cdot |B|^n$.

536. Să presupunem că matricele A, B de ordinul mn sînt împărțite în n^2 celule pătrate, astfel încît ele se scriu sub forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11}, & B_{12}, & \ldots, & B_{1n} \\ B_{21}, & B_{22}, & \ldots, & B_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1}, & B_{n2}, & \ldots, & B_{nn} \end{pmatrix},$$

unde A_{ik} și B_{ik} sînt matrice pătrate de ordinul m. Să presupunem că am format produsul lor C și l-am împărțit în același mod în celulele C_{ik}. Să se demonstreze că

$$C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \ldots + A_{in}B_{nk}.$$

Cu alte cuvinte, înmulțirea matricelor împărțite în celule se face formal după aceeași regulă ca și în cazul în care în locul matricelor din celule s-ar afla numere.

*537. Să presupunem că o matrice C de ordinul mn este împărțită în n^2 celule pătrate egale. Mai departe, să presupunem că matricele A_{ik}, formate de elementele celulelor, sînt comutative două cîte două față de înmulțire. Din matricele A_{ik} se formează „*determinantul*" $\sum \pm A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} \ldots A_{n\alpha_n} = B$. Acest „*determinant*" este o matrice de ordinul m. Să se demonstreze că determinantul matricei C este egal cu determinantul matricei B.

CAPITOLUL V

POLINOAME ŞI FUNCŢII RAŢIONALE DE O SINGURĂ VARIABILĂ

§ 1. Operaţii cu polinoame. Formula lui Taylor. Rădăcini multiple

538. Să se înmulţească polinoamele:

a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$,

b) $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^3 - 2x - 1)$.

539. Să se efectueze împărţirile cu rest

a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ la $x^2 - 3x + 1$,

b) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ la $3x^2 - 2x + 1$.

540. In ce condiţii polinomul $x^3 + px + q$ este divizibil cu un polinom de forma $x^2 + mx - 1$?

541. In ce condiţii polinomul $x^4 + px^2 + q$ este divizibil cu un polinom de forma $x^2 + mx + 1$?

542. Să se simplifice polinomul

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

543. Să se efectueze împărţirile (cu rest):

a) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ la $x - 1$,

b) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ la $x + 3$,

c) $4x^3 + x^2$ la $x + 1 + i$,

d) $x^3 - x^2 - x$ la $x - 1 + 2i$.

544. Folosind schema lui Horner, să se calculeze $f(x_0)$:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$; $x_0 = 4$,

b) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$; $x_0 = -2 - i$.

545. Folosind schema lui Horner, să se dezvolte polinomul $f(x)$ după puterile lui $x - x_0$:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$; $x_0 = -1$,

b) $f(x) = x^5$; $x_0 = 1$,

c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$; $x_0 = 2$,

d) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i$; $x_0 = -i$,

e) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i$; $x_0 = -1 + 2i$.

546. Folosind schema lui Horner să se descompună în fracții simple:

a) $\frac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5}$, b) $\frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x+1)^5}$.

***547.** Cu ajutorul schemei lui Horner să se dezvolte după puterile lui x:

a) $f(x + 3)$, unde $f(x) = x^4 - x^3 + 1$,

b) $(x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$.

548. Să se afle valorile polinomului $f(x)$ și ale derivatelor lui pentru $x = x_0$:

a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$; $x_0 = 2$,

b) $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$; $x_0 = 1 + 2i$.

549. Care este ordinul de multiplicitate al rădăcinii:

a) 2 pentru polinomul $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$,

b) -2 pentru polinomul $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$.

550. Să se determine coeficientul a, astfel încît polinomul $x^5 - ax^2 - ax + 1$ să admită pe -1 ca rădăcină de ordin de multiplicitate $\geqslant 2$.

551. Să se determine A și B, astfel încît $Ax^4 + Bx^3 + 1$ să fie divizibil cu $(x-1)^2$.

552. Să se determine A și B, astfel încît $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ să fie divizibil cu $(x-1)^2$.

***553.** Să se demonstreze că polinoamele:

a) $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$,

b) $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$,

c) $(n - 2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n - 2m)$,

admit pe 1 ca rădăcină triplă.

554. Să se demonstreze că polinomul:

$$x^{2n+1} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} x^{n+2} + \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2} x^{n+1} - \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2} x^{n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} x^{n-1} - 1$$

este divizibil cu $(x-1)^5$ și nu este divizibil cu $(x-1)^6$.

555. Să se demonstreze că, pentru ca polinomul

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

să fie divizibil cu $(x-1)^{k+1}$ este necesar și suficient să fie îndeplinite condițiile:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= 0, \\ a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n &= 0, \\ a_1 + 4a_2 + \ldots + n^2 a_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_1 + 2^k a_2 + \ldots + n^k a_n &= 0. \end{aligned}$$

556. Să se determine multiplicitatea rădăcinii a, a polinomului

$$\frac{x-a}{2}[f'(x) + f'(a)] - f(x) + f(a),$$

unde $f(x)$ este un polinom.

557. Să se afle condiția ca polinomul $x^5 + ax^3 + b$ să aibă o rădăcină dublă diferită de zero.

558. Să se afle condițiile ca polinomul $x^5 + 10ax^3 + 5bx + c$ să aibă o rădăcină triplă diferită de zero.

559. Să se demonstreze că trinomul $x^n + ax^{n-m} + b$ nu poate avea rădăcini diferite de zero, de multiplicitate mai mare decît 2.

560. Să se afle condiția ca trinomul $x^n + ax^{n-m} + b$ să aibă o rădăcină dublă diferită de zero.

***561.** Să se demonstreze că polinomul cu k termeni

$$a_1 x^{p_1} + a_2 x^{p_2} + \ldots + a_k x^{p_k}$$

nu are rădăcini cu ordine de multiplicitate mai mare decît $k-1$, diferite de 0.

***562.** Să se demonstreze că orice rădăcină diferită de 0, de multiplicitate $k-1$, a polinomului

$$a_1x^{p_1} + a_2x^{p_2} + \ldots + a_kx^{p_k}$$

verifică ecuațiile:

$$a_1x^{p_1}\varphi'(p_1) = a_2x^{p_2}\varphi'(p_2) = \ldots = a_kx^{p_k}\varphi'(p_k),$$

unde

$$\varphi(t) = (t-p_1)(t-p_2)(t-p_3)\ldots(t-p_k),$$

și reciproc.

***563.** Să se demonstreze că un polinom este divizibil cu derivata lui, atunci și numai atunci cînd el este egal cu $a_0(x-x_0)^n$.

564. Să se demonstreze că polinomul

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

nu are rădăcini multiple.

565. Să se demonstreze că pentru ca x_0 să fie o rădăcină multiplă de ordinul k a funcției raționale $f(x) = \frac{\varphi(x)}{w(x)}$, al cărei numitor nu se anulează pentru $x = x_0$, este necesar și suficient ca

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0;\ f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

566. Să se demonstreze că funcția rațională $f(x) = \frac{\varphi(x)}{w(x)}$ poate fi reprezentată sub forma

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{F(x)}{w(x)}(x-x_0)^{n+1},$$

unde $F(x)$ este un polinom. Se presupune că $w(x_0) \neq 0$ (formula lui Taylor pentru o funcție rațională).

***567.** Să se demonstreze că dacă x_0 este o rădăcină de multiplicitate k pentru polinomul $f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)$, atunci x_0 este o rădăcină de multiplicitate $k+1$ pentru polinomul $f_1(x)f_2(x_0) - f_2(x)f_1(x_0)$, dacă acesta din urmă nu este identic nul și reciproc.

***568.** Să se demonstreze că dacă $f(x)$ nu are rădăcini multiple, atunci $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ nu are rădăcini de multiplicitate mai mare decît $n-1$, unde n este gradul lui $f(x)$.

***569.** Să se formeze un polinom $f(x)$ de gradul n, pentru care $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ are o rădăcină x_0, de multiplicitate $n-1$, care nu este rădăcină a polinomului $f(x)$.

§ 2. Demonstrarea teoremei fundamentale a Algebrei superioare și probleme conexe

570. Să se determine δ, astfel încît pentru $|x| < \delta$

$$x^5 - 4x^3 + 2x$$

să fie în modul mai mic decît 0,1.

571. Să se determine δ, astfel încît $|f(x) - f(2)| < 0{,}01$ pentru orice x care verifică inegalitatea $|x-2| < \delta$, cînd $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x + 5$.

572. Să se determine M, astfel încît pentru $|x| > M$ să avem

$$|x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2| > 100.$$

573. Să se afle x, astfel încît $|f(x)| < |f(0)|$, unde

a) $f(x) = x^5 - 3ix^3 + 4$, b) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 4$.

574. Să se afle x, astfel încît $|f(x)| < |f(1)|$, unde

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$,
b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$,
c) $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

575. Să se demonstreze că dacă $z - i = a(1-i)$,

$0 < a < \frac{1}{2}$, atunci $|f(z)| < \sqrt{5}$,

în cazul cînd

$$f(z) = (1+i)z^5 + (3-5i)z^4 - (9+5i)z^3 - 7(1-i)z^2 + 2(1+3i)z + 4 - i$$

***576.** Să se demonstreze că dacă $f(z)$ este un polinom diferit de o constantă, atunci într-o vecinătate oricît de mică a lui z_0 putem găsi un z_1, astfel încît $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

577. Să se demonstreze lema lui d'Alembert pentru funcțiile raționale.

578. Să se demonstreze că modulul unei funcții raționale își atinge efectiv marginea inferioară exactă, cînd variabila independentă variază într-un domeniu dreptunghiular închis.

579. Este evident că teorema de existență a unei rădăcini nu este valabilă pentru funcțiile raționale. Astfel, funcția $\frac{1}{z}$ nu are nici o rădăcină. Ce împiedică „demonstrarea" teoremei după aceeași schemă ca și pentru polinoame?

***580.** Să presupunem că $f(x)$ este un polinom sau o funcție rațională. Să se demonstreze că dacă a este o rădăcină de ordin de multiplicitate k a lui $f(z) - f(a)$ și dacă $f(a) \neq 0$, atunci pentru un ρ suficient de mic pe circumferința $|z - a| = \rho$ există $2k$ puncte în care $|f(z)| = |f(a)|$.

***581.** Dacă a este o rădăcină de multiplicitate k a lui $f(z) - f(a)$, atunci pentru un ρ suficient de mic pe circumferința $|z - a| = \rho$ există $2k$ puncte în care $\Re(f(z)) = \Re(f(a))$ și $2k$ puncte în care $\Im((f)z)) = \Im(f(a))$. Aici $f(z)$ poate fi un polinom sau o funcție rațională.

§ 3. Descompunerea în factori liniari. Descompunerea în factori ireductibili în corpul numerelor reale. Relații între coeficienți și rădăcini

582. Să se descompună următoarele polinoame în factori liniari:

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; b) $x^4 + 4$;

c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$; d) $x^4 - 10x^2 + 1$.

***583.** Să se descompună în factori liniari:

a) $\cos(n \arccos x)$;

b) $(x + \cos\theta + i\sin\theta)^n + (x + \cos\theta - i\sin\theta)^n$;

c) $x^m - C_{2m}^2 x^{m-1} + C_{2m}^4 x^{m-2} - \ldots + (-1)^m C_{2m}^{2m}$.

584. Să se descompună în factori ireductibili cu coeficienți reali, polinoamele:

a) $x^4 + 4$; b) $x^6 + 27$; c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$;

d) $x^{2n} - 2x^n + 2$; e) $x^4 - ax^2 + 1$; $-2 < a < 2$;

f) $x^{2n} + x^n + 1$.

585. Să se determine polinoamele de gradul cel mai mic ale căror rădăcini sînt date:

a) rădăcină dublă 1, rădăcini simple 2, 3 și $1+i$;
b) rădăcină triplă -1, rădăcini simple 3 și 4;
c) rădăcină dublă i, rădăcină simplă $-1-i$.

586. Să se afle polinomul de gradul cel mai mic care admite ca rădăcini toate rădăcinile unității, puterile cărora nu depășesc pe n.

587. Să se formeze polinomul de gradul cel mai mic cu coeficienți reali, care admite ca rădăcini:

a) rădăcină dublă 1, rădăcini simple 2, 3 și $1+i$;
b) rădăcină triplă $2-3i$;
c) rădăcină dublă i, rădăcină simplă $-1-i$.

588. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ și $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ și
$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

c) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ și $(x^2-1)^3$.

***589.** Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$x^m-1 \quad \text{și} \quad x^n-1.$$

590. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$x^m+a^m \quad \text{și} \quad x^n+a^n.$$

591. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinomului și al derivatei lui

a) $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x-3)$;

b) $f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$;

c) $f(x)=x^{m+n}-x^m-x^n+1$.

592. Polinomul $f(x)$ nu are rădăcini multiple. Să se demonstreze că dacă x_0 este o rădăcină de multiplicitate $k>1$ pentru ecuația $f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=0$, atunci ecuația $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)=0$ admite pe x_0 ca rădăcină de multiplicitate $k-1$.

Se presupune că $v(x_0)\neq 0$, $v'(x_0)\neq 0$.

593. Să se demonstreze că $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ este divizibil cu $x^2 + x + 1$.

594. Cînd $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ este divizibil cu $x^2 - x + 1$?

595. In ce condiții $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ este divizibil cu $x^4 + x^2 + 1$?

596. In ce condiții $x^{2m} + x^m + 1$ este divizibil cu $x^2 + x + 1$?

597. Să se demonstreze că

$$x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \ldots + x^{ka_k+k-1}$$

este divizibil cu $x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1$.

598. Pentru care valori ale lui m polinomul $(x+1)^m - x^m - 1$ este divizibil cu $x^2 + x + 1$?

599. Pentru care valori ale lui m polinomul $(x+1)^m + x^m + 1$ este divizibil cu $x^2 + x + 1$?

600. Pentru care valori ale lui m polinomul $(x+1)^m - x^m - 1$ este divizibil cu $(x^2 + x + 1)^2$?

601. Pentru care valori ale lui m polinomul $(x+1)^m + x^m + 1$ este divizibil cu $(x^2 + x + 1)^2$?

602. Este oare posibil ca polinoamele $(x+1)^m + x^m + 1$ și $(x+1)^m - x^m - 1$ să fie divizibile cu $(x^2 + x + 1)^3$?

603. Să se factorizeze polinomul

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

dînd lui x consecutiv valorile 1, 2, 3, ..., n (să se compare cu problema 542).

604. Pentru care valori ale lui m polinomul $X_n(x^m)$ este divizibil cu $X_n(x)$? (X_n este un polinom circular).

605. Să se demonstreze că dacă $f(x_n)$ este divizibil cu $x - 1$, atunci este divizibil și cu $x^n - 1$.

606. Să se demonstreze că dacă $f(x^n)$ este divizibil cu $(x-a)^k$, atunci este divizibil și cu $(x^n - a^n)^k$, pentru $a \neq 0$.

607. Să se demonstreze că dacă $F(x) = f_1(x^3) + x f_2(x^3)$ este divizibil cu $x^2 + x + 1$, atunci $f_1(x)$ și $f_2(x)$ sînt divizibile cu $x - 1$.

***608.** Să se demonstreze că dacă polinomul $f(x)$, cu coeficienți reali, verifică inegalitatea $f(x) \geqslant 0$ pentru toate valorile reale ale lui x, atunci $f(x) = [\varphi_1(x)]^2 + [\varphi_2(x)]^2$, unde $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ sînt polinoame cu coeficienți reali.

609. Polinomul $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ are rădăcinile $x_1, \ldots, x_n$. Care sînt rădăcinile polinoamelor:

a) $a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$;

b) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$;

c) $f(a) + \frac{f'(a)}{1}x + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$;

d) $a_0x^n + a_1bx^{n-1} + a_2b^2x^{n-2} + \ldots + a_nb^n$.

610. Să se afle relația dintre coeficienții ecuației de gradul al treilea $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, în cazul cînd o rădăcină este egală cu suma celorlalte două.

611. Să se verifice că una dintre rădăcinile ecuației $36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ este egală cu suma celorlalte două și să se rezolve ecuația.

612. Să se afle relația care trebuie să existe între coeficienții unei ecuații de gradul al patrulea $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, pentru ca suma a două rădăcini să fie egală cu suma celorlalte două rădăcini.

613. Să se demonstreze că o ecuație care verifică condiția problemei 612 se reduce la o ecuație bipătrată prin substituția $x = y + \alpha$ și printr-o alegere convenabilă a lui α.

614. Să se afle relația care trebuie să existe între coeficienții ecuației de gradul al patrulea $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, pentru ca produsul a două rădăcini să fie egal cu produsul celorlalte două rădăcini.

615. Să se demonstreze că o ecuație care satisface condiția din problema 614 se rezolvă prin împărțire cu x^2 și prin substituția $y = x + \frac{c}{ax}$ (pentru $a \neq 0$).

616. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$,
b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$,
c) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$,
d) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$,

folosind rezultatele problemelor 612—615.

617. Să se determine λ, astfel încît una dintre rădăcinile ecuației $x^3 - 7x + \lambda = 0$ să fie egală cu dublul unei alte rădăcini.

618. Să se determine a, b, c, astfel încît ele să fie rădăcinile ecuației

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

619. Să se determine a, b, c, astfel încît ele să fie rădăcinile ecuației

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

620. Suma a două rădăcini ale ecuației

$$2x^3-x^2-7x+\lambda=0.$$

este egală cu 1. Să se determine λ.

621. Să se determine relația dintre coeficienții ecuației $x^3+px+q=0$, în cazul cînd $x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

622. Să se afle suma pătratelor rădăcinilor polinomului

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

***623.** Să se rezolve ecuația

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0,$$

cunoscînd coeficienții a_1 și a_2 și știind că rădăcinile ei formează o progresie aritmetică.

624. Să se cerceteze dacă rădăcinile ecuațiilor

a) $8x^3-12x^2-2x+3=0$,
b) $2x^4+8x^3+7x^2-2x-2=0$

formează progresii aritmetice.

625. Să dă curba

$$y=x^4+ax^3+bx^2+cx+d.$$

Să se afle o dreaptă, astfel încît punctele ei de intersecție M_1, M_2, M_3, și M_4 cu curba de mai sus să determine pe această dreaptă trei segmente egale: $M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4$. In ce condiții admite problema soluții?

***626.** Să se formeze ecuația de gradul al patrulea care are rădăcinile $\alpha, \frac{1}{\alpha}, -\alpha, -\frac{1}{\alpha}$.

***627.** Să se formeze ecuația de gradul al șaselea care are rădăcinile

$$\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1-\alpha, \frac{1}{1-\alpha}, 1-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

628. Fie $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Să se afle $f'(x_i)$, $f''(x_i)$ și să se demonstreze că

$$\frac{\partial f'(x_i)}{\partial x_i}=\frac{1}{2}f''(x_i).$$

629. Să se demonstreze că dacă $f(x_1)=f''(x_1)=0$, dar $f'(x_1)\neq 0$, atunci

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_1-x_i}=0.$$

630. Rădăcinile polinomului $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ sînt în progresie aritmetică. Să se determine $f'(x_i)$.

§ 4. Algoritmul lui Euclid

631. Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor

a) $x^4+x^3-3x^2-4x-1$ și x^3+x^2-x-1;
b) $x^5+x^4-x^3-2x-1$ și $3x^4+2x^3+x^2+2x-2$;
c) $x^6-7x^4+8x^3-7x+7$ și $3x^5-7x^3+3x^2-7$;
d) $x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10$ și $3x^4-6x^3+5x^2+2x-2$;
e) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ și x^5+x^2-x+1;
f) $x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12$ și
$x^4+3x^3-6x^2-22x-12$;
g) $x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1$ și $x^4-2x^3-x^2-2x+1$;
h) x^4-10x^2+1 și $x^4-4\sqrt{2}\,x^3+6x^2+4\sqrt{2}\,x+1$;
i) $x^4+7x^3+19x^2+23x+10$ și $x^4+7x^3+18x^2+22x+12$;
j) x^4-4x^3+1 și x^3-3x^2+1;
k) $2x^6-5x^5-14x^4+36x^3+86x^2+12x-31$ și
$2x^5-9x^4+2x^3+37x^2+10x-14$;
l) $3x^6-x^5-9x^4-14x^3-11x^2-3x-1$ și
$3x^5+8x^4+9x^3+15x^2+10x+9$.

632. Să se folosească algoritmul lui Euclid pentru a determina polinoamele $M_1(x)$ și $M_2(x)$, astfel încît $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=\delta(x)$, unde $\delta(x)$ este cel mai mare divizor comun al lui $f_1(x)$ și al lui $f_2(x)$

a) $f_1(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$;
$f_2(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;
b) $f_1(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$;
$f_2(x)=x^4+2x^3+x+2$;

c) $f_1(x)=x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$;
$f_2(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$;
d) $f_1(x)=3x^7+6x^6-3x^5+4x^4+14x^3-6x^2-4x+4$;
$f_2(x)=3x^6-3x^4+7x^3-6x+2$;
e) $f_1(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$;
$f_2(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$;
f) $f_1(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$;
$f_2(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

633. Folosind algoritmul lui Euclid, să se afle două polinoame $M_1(x)$, $M_2(x)$, astfel încît $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=1$

a) $f_1(x)=3x^3-2x^2+x+2$; $f_2(x)=x^2-x+1$;
b) $f_1(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$; $f_2(x)=x^2-x-1$;
c) $f_1(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12$;
$f_2(x)=x^3-5x^2-3x+17$;
d) $f_1(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$;
$f_2(x)=2x^3+x^2-x-1$;
e) $f_1(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$;
$f_2(x)=3x^3-2x^2+x-1$;
f) $f_1(x)=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$;
$f_2(x)=x^4+2x^3+2x^2+x+1$.

634. Să se determine polinoamele $M_1(x)$ și $M_2(x)$ prin metoda coeficienților nedeterminați, astfel încît $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=1$

a) $f_1(x)=x^4-4x^3+1$, $f_2(x)=x^3-3x^2+1$;
b) $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=(1-x)^2$;
c) $f_1(x)=x^4$, $f_2(x)=(1-x)^4$.

635. Să se afle polinoamele $M_1(x)$ și $M_2(x)$ de gradele cele mai mici, pentru care

a) $(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)M_1(x)+(x^3-5x-3)M_2(x)=x^4$;
b) $(x^4+2x^3+x+1)M_1(x)+$
$+(x^4+x^3-2x^2+2x-1)M_2(x)=x^3-2x$.

636. Să se determine polinomul de gradul cel mai mic care dă restul:

a) $2x$, la împărțirea cu $(x-1)^2$ și $3x$, la împărțirea cu $(x-2)^3$;

b) x^2+x+1, la împărțirea cu $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ și $2x^2-3$, la împărțirea cu $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$.

*637. Să se găsească polinoamele $M(x)$ și $N(x)$, astfel încît

$$x^m M(x)+(1-x)^n N(x)=1.$$

638. Fie $f_1(x)M(x)+f_2(x)N(x)=\delta(x)$, unde $\delta(x)$ este cel mai mare divizor comun al lui $f_1(x)$ și al lui $f_2(x)$. Care este cel mai mare divizor comun al lui $M(x)$ și al lui $N(x)$?

639. Să se scoată în evidență factorii multipli al polinoamelor

a) $x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$;
b) $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$;
c) $x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$;
d) $x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$;
e) $x^6-2x^5-x^4-2x^3+5x^2+4x+4$;
f) $x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$;
g) $x^8+2x^7+5x^6+6x^5+8x^4+6x^3+5x^2+2x+1$.

§ 5. Problema interpolării și funcțiile raționale

640. Folosind procedeul lui Newton, să se construiască polinomul de interpolare de gradul cel mai mic după următoarea tabelă de valori:

a)
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4	6

; b)
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	0	3	2

;

c)
x	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

; să se afle $f(2)$; d)
x	1	2	3	4	6
$f(x)$	5	6	1	-4	10

641. Folosind formula lui Lagrange să se construiască polinomul de interpolare după tabela de valori

a)
x	1	2	3	4
y	2	1	4	3

, b)
x	1	i	-1	$-i$
y	1	2	3	4

.

*642. Să se afle $f(x)$ după tabela de valori

$$\begin{array}{c|cccccc} x & 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array}, \text{ unde } \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

643. Polinomul $f(x)$, al cărui grad nu depășește $n-1$, ia valorile $y_1, y_2, \ldots y_n$, pentru rădăcinile de ordinul n ale unității. Să se găsească $f(0)$.

***644.** Să se demonstreze că pentru ca să avem

$$f(x_0) = \frac{1}{n}[f(x)_1 + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$$

pentru orice polinom $f(x)$ de grad cel mult $n-1$, este necesar și suficient ca punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ să fie situate pe o circumferință cu centrul în x_0 și să o împartă în părți egale.

***645.** Să se demonstreze că dacă rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale polinomului $\varphi(x)$ sînt toate distincte, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)} = 0$$

pentru $0 \leqslant s \leqslant n-2$.

646. Să se afle suma $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}$ (notațiile sînt aceleași ca și în problema 645).

647. Să se deducă formula de interpolare a lui Lagrange prin rezolvarea sistemului de ecuații

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} &= y_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} &= y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} &= y_n. \end{aligned}$$

***648.** Să se determine polinomul de gradul cel mai mic după tabela de valori

x	0	1	2	...	n
y	1	2	4	...	2^n

***649.** Să se determine polinomul de gradul cel mai mic după tabela de valori

x	0	1	2	...	n
y	1	a	a^2	...	a^n

***650.** Să se afle polinomul de gradul $2n$, care prin împărțire cu $x(x-2)\ldots(x-2n)$ dă restul 1, iar prin împărțire cu $(x-1)(x-3)\ldots[x-(2n-1)]$ dă restul -1.

***651.** Să se determine polinomul de gradul cel mai mic după tabela de valori

x	1	2	3	...	n
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{n}$

***652.** Să se găsească polinomul de grad cel mult $n-1$ care verifică condiția $f(x)=\frac{1}{x-a}$ în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \neq a$, $i=1, 2, \ldots, n$.

***653.** Să se demonstreze că un polinom de gradul $k \leqslant n$, care ia valori întregi, pentru $n+1$ valori întregi consecutive ale variabilei, ia valori întregi pentru toate valorile întregi ale variabilei.

***654.** Să se demonstreze că un polinom de gradul n, care ia valori întregi pentru $x=0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, ia valori întregi pentru toate pătratele numerelor naturale.

***655.** Să se descompună în fracții simple de prima speță

a) $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3}$; b) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

c) $\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$; d) $\frac{x^2}{x^4-1}$; e) $\frac{1}{x^3-1}$; f) $\frac{1}{x^4+4}$;

g) $\frac{1}{x^n-1}$; h) $\frac{1}{x^n+1}$; i) $\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}$;

j) $\frac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-n^2)}$; k) $\frac{1}{\cos(n \arccos x)}$.

***656.** Să se descompună în fracții simple reale, de prima și a doua speță:

a) $\frac{1}{x^3-1}$; b) $\frac{x^2}{x^4-16}$; c) $\frac{1}{x^4+4}$; d) $\frac{x^2}{x^6+27}$;

e) $\frac{x^m}{x^{2n+1}-1}$, $m<2n+1$; f) $\frac{x^m}{x^{2n+1}+1}$, $m<2n+1$;

g) $\frac{1}{x^{2n}-1}$; h) $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, $m<n$; i) $\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)\ldots(x^2+n^2)}$.

***657.** Să se descompună în fracții simple de prima speță:

a) $\frac{x}{(x^2-1)^2}$; b) $\frac{1}{(x^2-1)^2}$; c) $\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^3(x-2)}$; d) $\frac{1}{(x^n-1)^2}$;

e) $\frac{1}{x^m(1-x)^n}$; f) $\frac{1}{(x^2-a^2)^n}$, $a \neq 0$; g) $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$; h) $\frac{g(x)}{[f(x)]^2}$,

în care $f(x)=(x-x_1)\,(x-x_2)\,\ldots\,(x-x_n)$ este un polinom fără rădăcini multiple, iar $g(x)$ — un polinom de grad mai mic decît $2n$.

658. Să se descompună în fracții simple reale, de prima și a doua speță:

a) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; b) $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$;

c) $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$; d) $\dfrac{1}{(x^{2n}-1)^2}$.

659. Fie $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Să se exprime cu ajutorul lui $\varphi(x)$, sumele

a) $\sum\dfrac{1}{x-x_i}$; b) $\sum\dfrac{x_i}{x-x_i}$; c) $\sum\dfrac{1}{(x-x_i)^2}$.

***660.** Să se calculeze următoarele sume, știind că x_1, x_2, ... sînt rădăcini ale polinomului $\varphi(x)$:

a) $\dfrac{1}{2-x_1}+\dfrac{1}{2-x_2}+\dfrac{1}{2-x_3}$, $\varphi(x)=x^3-3x-1$;

b) $\dfrac{1}{x_1^2-3x_1+2}+\dfrac{1}{x_2^2-3x_2+2}+\dfrac{1}{x_3^2-3x_3+2}$,

$\varphi(x)=x^3+x^2-4x+1$;

c) $\dfrac{1}{x_1^2-2x_1+1}+\dfrac{1}{x_2^2-2x_2+1}+\dfrac{1}{x_3^2-2x_3+1}$, $\varphi(x)=x^3+x^2-1$.

661. Să se determine polinomul de gradul întîi, care ia, în mod aproximativ, valorile

x	0	1	2	3	4
y	2,1	2,5	3,0	3,6	4,1

astfel încît suma pătratelor erorilor să fie minimă.

662. Să se determine polinomul de gradul al doilea care ia, în mod aproximativ, valorile

x	0	1	2	3	4
y	1	1,4	2	2,7	3,6

astfel încît suma pătratelor erorilor să fie minimă.

§ 6. Rădăcinile raționale ale polinoamelor. Reductibilitate și ireductibilitate în corpul numerelor raționale

663. Să se demonstreze că dacă $\frac{p}{q}$ este o fracție rațională ireductibilă, rădăcină a polinomului cu coeficienți întregi $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, atunci

1) q este un divizor al lui a_0;
2) p este un divizor al lui a_n;
3) $p-mq$ este un divizor al lui $f(m)$ pentru orice m întreg.

In particular, $p-q$ este un divizor al lui $f(1)$, iar $p+q$ — un divizor al lui $f(-1)$,

664. Să se afle rădăcinile raționale ale polinoamelor următoare:

a) $x^3-6x^2+15x-14$;
b) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$;
c) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$;
d) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;
e) $24x^4-42x^3-77x^2+56x+60$;
f) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$;
g) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$;
h) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$;
i) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24$;
k) $2x^3+3x^2+6x-4$;
l) $4x^4-7x^2-5x-1$;
m) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$;
n) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$;
o) $x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$.

***665.** Să se demonstreze că un polinom $f(x)$ cu coeficienți întregi nu are rădăcini întregi, dacă $f(0)$ și $f(1)$ sînt numere impare.

***666.** Să se demonstreze că dacă un polinom cu coeficienți întregi ia valorile ±1 pentru două valori x_1 și x_2 ale lui x, atunci el nu are rădăcini întregi dacă $|x_1-x_2|>2$.

Dacă $|x_1-x_2|\leqslant 2$, atunci singura rădăcină rațională poate fi numai $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

***667.** Folosind criteriul lui Eisenstein, să se demonstreze ireductbilitatea polinoamelor

a) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;
b) $x^5-12x^3+36x-12$; c) x^4-x^3+2x+1.

***668.** Să se demonstreze ireductibilitatea polinomului

$$X_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1},$$

p fiind un număr prim.

***669.** Să se demonstreze ireductibilitatea polinomului

$$X_{p^k}(x) = \frac{x^{p^k} - 1}{x^{p^{k-1}} - 1},$$

p fiind un număr prim.

***670.** Să se demonstreze că un polinom $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, cu coeficienți întregi, care nu are rădăcini raționale, este ireductibil dacă există un număr prim p astfel încît a_0 nu este divizibil cu p; $a_2, a_3, \ldots, a_n$ sînt divizibile cu p, iar a_n nu este divizibil cu p^2.

***671.** Fie $f(x)$ un polinom cu coeficienți întregi și p un număr prim, astfel încît a_0 nu este divizibil cu p; $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ sînt divizibile cu p, iar a_n nu este divizibil cu p^2. Să se demonstreze că $f(x)$ admite un factor ireductibil de grad $\geqslant n-k$.

672. Să se descompună în factori sau să se demonstreze ireductibilitatea polinoamelor de mai jos prin metoda descompunerii în factori a valorilor pe care le ia polinomul pentru valori întregi ale variabilei

a) $x^4 - 3x^2 + 1$; b) $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 5x + 1$;
c) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$; d) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

673. Un polinom de gradul al treilea este ireductibil, dacă nu are rădăcini raționale.

674. Să se demonstreze că un polinom de gradul al patrulea $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, cu coeficienți întregi, este ireductibil dacă nu are rădăcini întregi și nu este divizibil cu nici unul dintre polinoamele de forma

$$x^2 + \frac{cm - am^2}{d - m^2}x + m,$$

unde m sînt divizorii numărului d. Polinoamele cu coeficienți fracționari pot să nu fie luate în considerare.

Pot prezenta excepții polinoamele asemănătoare cu cele reciproce (problemele 614—615).

675. Să se demonstreze că un polinom de gradul al cincilea $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, cu coeficienți întregi, este ire-

ductibil dacă nu are rădăcini întregi și nu este divizibil cu nici unul dintre polinoamele cu coeficienți întregi de forma :

$$x^2 + \frac{am^3 - cm^2 - dn + be}{m^3 - n^2 + ae - dm} x + m ;$$

m este un divizor al lui e, iar $n = \frac{e}{m}$.

676. Să se descompună în factori sau să se demonstreze ireductibilitatea următoarelor polinoame, folosind problemele 674, 675 :

a) $x^4-3x^3+2x^2+3x-9$; b) $x^4-3x^2+2x^2+2x-6$;
c) $x^4+4x^3-6x^2-23x-12$;
d) $x^5+x^4-4x^3+9x^2-6x+6$.

677. Să se găsească condițiile necesare și suficiente pentru ca polinomul x^4+px^2+q, cu coeficienți raționali (care pot fi și fracționari), să fie reductibil.

678. Să se demonstreze că pentru ca un polinom de gradul al patrulea, fără rădăcini raționale, să fie reductibil, este necesar (dar nu și suficient) să existe cel puțin o rădăcină rațională a rezolvantei cubice care se obține cu metoda lui Ferrari.

***679.** Să se demonstreze ireductibilitatea polinomului $f(x) = (x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_n)-1$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi distincte.

***680.** Să se demonstreze ireductibilitatea polinomului $f(x) = (x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_n)+1$ unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi și distincte, cu excepțiile :

$$(x-a)(x-a-1)(x-a-2)(x-a-3)+1 = [(x-a-1)(x-a-2)-1]^2$$

și

$$(x-a)(x-a-2)+1 = (x-a-1)^2.$$

***681.** Să se demonstreze că dacă un polinom de gradul n, cu coeficienți întregi, ia valorile ± 1 pentru mai mult decît $2m$ valori întregi ale variabilei ($n = 2m$ sau $2m+1$), atunci el este ireductibil.

***682.** Să se demonstreze ireductibilitatea polinomului

$$f(x) = (x-a_1)^2 (x-a_2)^2 \ldots (x-a_n)^2+1,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi distincte.

***683.** Să se demonstreze că un polinom $f(x)$ cu coeficienți întregi, care ia valoarea $+1$ pentru mai mult decît trei valori întregi ale variabilei independente, nu poate să ia valoarea -1 pentru nici o valoare întreagă a variabilei independente.

***684.** Să se demonstreze că un polinom de gradul n, cu coeficienți întregi, care ia valorile ± 1 pentru mai mult decît $\frac{n}{2}$ valori întregi ale variabilei independente, este ireductibil dacă $n \geqslant 12$.

***685.** Să se demonstreze că dacă un polinom cu coeficienți întregi de forma ax^2+bx+1 este ireductibil, atunci este ireductibil și polinomul $a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1$, unde $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ pentru $n \geqslant 7$. Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt presupuse întregi și distincte.

§ 7. Marginile rădăcinilor unui polinom

686. Să se demonstreze că rădăcinile polinomului $a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, cu coeficienți reali sau complecși, nu depășesc în modul:

a) $1 + \operatorname{Max}\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$ $\qquad k = 1, 2, \ldots, n;$

b) $\rho + \operatorname{Max}\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|$ $\qquad k = 1, 2, \ldots, n;$

unde ρ este un număr pozitiv arbitrar:

c) $2 \operatorname{Max}\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, $\qquad k = 1, 2, \ldots, n;$

d) $\left|\frac{a_1}{a_0}\right| + \operatorname{Max}\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$ $\qquad k = 1, 2, \ldots n.$

687. Să se demonstreze că modulele rădăcinilor polinomului $a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ sînt mai mici sau egale cu rădăcina pozitivă a ecuației $b_0x^n - b_1x^{n-1} - b_2x^{n-2} - \ldots - b_n = 0$, unde $0 < b_0 \leqslant |a_0|$; $b_1 \geqslant |a_1|$; $b_2 \geqslant |a_2|$; $\ldots$; $b_n \geqslant |a_n|$.

688. Să se demonstreze că rădăcinile polinomului $f(x) = a_0x^n + a_rx^r + \ldots + a_n$, $a_r \neq 0$ nu depășește în modul

a) $1 + \sqrt[r]{\text{Max}\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, $\quad k=r, \ldots, n$;

b) $\rho + \sqrt[r]{\text{Max}\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}$ $\quad k=r, \ldots, n$;

ρ fiind un număr pozitiv arbitrar;

c) $\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|} + \text{Max}\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$ $\quad k=r, \ldots, n.$

689. Să se demonstreze că rădăcinile reale ale unui polinom cu coeficienți reali nu depășesc singura rădăcină nenegativă a polinomului care se obține din primul prin îndepărtarea tuturor termenilor ai căror coeficienți au același semn ca și coeficientul termenului de gradul cel mai înalt înafară de termenul de gradul cel mai înalt.

690. Să se demonstreze că rădăcinile reale ale polinomului $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ cu coeficienți reali și $a_0>0$ nu depășesc:

a) $1 + \sqrt[r]{\text{Max}\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$,

în care r este indicele primului coeficient negativ, iar a_k sînt coeficienții negativi ai polinomului;

b) $\rho + \sqrt[r]{\text{Max}\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}$, în care r este indicele primului coeficient negativ, a_k sînt coeficienții negativi, iar ρ este un număr pozitiv arbitrar;

c) $2\ \text{Max}\sqrt[k]{\frac{|a_k|}{a_0}}$, a_k fiind coeficienții negativi ai polinomului;

d) $\sqrt[r]{\frac{|a_r|}{a_0}} + \text{Max}\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$, în care r este indicele primului coeficient negativ, iar a_k sînt coeficienții negativi.

691. Să se demonstreze că dacă toți coeficienții unui polinom $f(x)$ sînt nenegativi, atunci polinomul nu admite rădăcini pozitive.

692. Să se demonstreze că dacă $f(a) > 0$, $f'(a) \geqslant 0, \ldots, f^{(n)}(a) \geqslant 0$, atunci nici una dintre rădăcinile pozitive ale polinomului nu este mai mare decît a.

693. Să se limiteze, superior și inferior, rădăcinile reale ale polinomului

a) $x^4-4x^3+7x^2-8x+3$; b) x^5+7x^3-3;
c) $x^7-108x^5-445x^3+900x^2+801$;
d) $x^4+4x^3-8x^2-10x+14$.

§ 8. Teorema lui Șturm

694. Să se formeze polinoamele lui Șturm și să se separe rădăcinile polinoamelor

a) x^3-3x-1; b) x^3+x^2-2x-1;
c) x^3-7x+7; d) x^3-x+5; e) x^3+3x-5.

695. Să se formeze polinoamele lui Șturm și să se separe rădăcinile polinoamelor

a) $x^4-12x^2-16x-4$; b) x^4-x-1;
c) $2x^4-8x^3+8x^2-1$; d) x^4+x^2-1;
e) $x^4+4x^3-12x+9$.

696. Să se formeze polinoamele lui Șturm și să se separe rădăcinile polinoamelor

a) $x^4-2x^3-4x^2+5x+5$; b) $x^4-2x^3+x^2-2x+1$;
c) $x^4-2x^3-3x^2+2x+1$; d) $x^4-x^3+x^2-x-1$;
e) $x^4-4x^3-4x^2+4x+1$.

697. Să se formeze șirul lui Șturm și să se separe rădăcinile polinoamelor

a) $x^4-2x^3-7x^2+8x+1$; b) x^4-4x^2+x+1;
c) $x^4-x^3-x^2-x+1$; d) $x^4-4x^3+8x^2-12x+8$;
e) x^4-x^3-2x+1.

698. Să se formeze șirul lui Șturm și să se separe rădăcinile polinoamelor

a) x^4-6x^2-4x+2 b) $4x^4-12x^2+8x-1$;
c) $3x^4+12x^3+9x^2-1$; d) $x^4-x^3-4x^2+4x+1$;
e) $9x^4-126x^2-252x-140$.

699. Să se formeze șirul lui Șturm și să se separe rădăcinile polinoamelor

a) $2x^5-10x^3+10x-3$;
b) $x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$;
c) $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$; d) $x^5-5x^3-10x^2+2$.

700. Să se formeze șirul lui Șturm, ținînd seamă că se pot împărți funcțiile lui Șturm cu cantități pozitive și apoi să se separe rădăcinile polinoamelor

a) x^4+4x^2-1; b) $x^4-2x^3+3x^2-9x+1$;
c) $x^4-2x^3+2x^2-6x+1$; d) $x^5+5x^4+10x^2-5x-3$.

701. Folosind teorema lui Șturm, să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^3+px+q=0$ pentru p și q reali.

***702.** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x^n+px+q=0.$$

703. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x^5-5ax^3+5a^2x+2b=0.$$

704. Să se demonstreze că dacă șirul lui Șturm conține polinoame de toate gradele de la 0 la n, atunci numărul variațiilor de semn și șirul coeficienților termenilor de gradul cel mai înalt ai polinoamelor lui Șturm este egal cu numărul perechilor de rădăcini complex conjugate ale polinomului inițial.

705. Să se demonstreze că dacă polinoamele $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ se bucură de proprietățile:

1) $f(x)f_1(x)$ își schimbă semnul de la + la −, cînd se trece printr-o rădăcină a lui $f(x)$;

2) două polinoame alăturate nu se anulează simultan;

3) dacă $f_\lambda(x_0)=0$, atunci $f_{\lambda-1}(x_0)$ și $f_{\lambda+1}(x_0)$ au semne diferite;

4) ultimul polinom $f_k(x)$ nu își schimbă semnul în intervalul (a, b), atunci numărul rădăcinilor polinomului $f(x)$, cuprinse în intervalul (a, b), este egal cu creșterea numărului variațiilor de semn în șirul valorilor polinoamelor f, f_1, ..., f_k, cînd se trece de la a la b.

706. Fie x_0 o rădăcină reală a lui $f'(x)$ și

$$f_1(x)=\frac{1}{x-x_0}f'(x);$$

$f_2(x)$ este restul împărţirii lui $f(x)$ cu $f_1(x)$, luat cu semnul schimbat; $f_3(x)$ este restul împărţirii lui $f_1(x)$ cu $f_2(x)$, luat cu semnul schimbat, etc. Se presupune că $f(x)$ nu are rădăcini multiple. Să se pună în legătură numărul rădăcinilor reale ale lui $f(x)$ cu numărul variaţiilor de semn în şirul valorilor polinoamelor construite, pentru $x=-\infty$, $x=x_0$ şi $x=+\infty$.

***707.** Să se construiască şirul lui Şturm pentru polinoamele lui Hermite

$$P_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

şi să se determine numărul rădăcinilor reale.

***708.** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinoamelor lui Laguerre

$$P_n(x)=(-1)^n e^x\frac{d^n e^{-x}x^n}{dx^n}.$$

***709.** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinomului

$$E_n(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

***710.** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinoamelor

$$P_n(x)=(-1)^{n+1}x^{2n+2}e^{-\frac{1}{x}}\frac{d^{n+1}(e^{\frac{1}{x}})}{dx^{n+1}}.$$

***711.** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinoamelor

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}(x^2+1)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+1}\right).$$

***712.** Să se determine numărul rădăcinilor reale lui polinoamelor

$$P_n(x)=(-1)^n(x^2+1)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

***713.** Fie $f(x)$ un polinom de gradul al treilea fără rădăcini multiple. Să se arate că polinomul $F(x)=2f(x)f''(x)-$

$-[f'(x)]^2$ are două și numai două rădăcini reale. Să se studieze cazurile cînd $f(x)$ are o rădăcină dublă sau triplă.

714. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)$ sînt reale și distincte, toate rădăcinile oricărui dintre polinoamele șirului lui Șturm, format cu ajutorul algoritmului lui Euclid, sînt reale și distincte.

§ 9. Probleme diverse relative la distribuția rădăcinilor unui polinom

715. Să se demonstreze că toate rădăcinile polinomului lui Legendre $P_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ sînt reale, distincte și cuprinse în intervalul $(-1, +1)$.

716. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului $\lambda f(x)+f'(x)$ sînt, de asemenea, reale pentru oricare λ real.

***717.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)$ și ale polinomului $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ sînt, reale atunci toate rădăcinile polinomului

$$F(x)=a_0f(x)+a_1f'(x)+\ldots+a_nf^{(n)}(x)$$

sînt, de asemenea reale.

***718.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului

$$a_0x^n+a_1mx^{n-1}+a_2m(m-1)x^{n-2}+\ldots+a_nm(m-1)\ldots(m-n+1)$$

sînt, de asemenea reale pentru orice m întreg și pozitiv.

***719.** Dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului

$$G(x)=a_0x^n+C_n^1a_1x^{n-1}+C_n^2a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

sînt, de asemenea, reale.

720. Să se demonstreze că toate rădăcinile polinomului

$$x^n+\left(\frac{n}{1}\right)^2x^{n-1}+\left(\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\right)^2x^{n-2}+\ldots+1$$

sînt reale.

***721.** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinomului

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1.$$

722. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinomului

$$x^{2n_1+1} + x^{2n_2+1} + \ldots + x^{2nk+1} + a.$$

723. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinomului $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c) - A^2(x-a) - B^2(x-b) - C^2(x-c)$ pentru a, b, c şi A, B, C reali.

724. Să se demonstreze că

$$\varphi(x) = \frac{A_1^2}{x-a_1} + \frac{A_2^2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n^2}{x-a_n} + B$$

nu are rădăcini imaginare pentru $a_1, a_2, \ldots, a_n, A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ reali.

725. Să se demonstreze că dacă polinomul $f(x)$ are rădăcini reale şi distincte, atunci $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ nu are rădăcini reale.

726. Să se demonstreze că dacă rădăcinile polinoamelor $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sînt toate reale, simple şi se separă reciproc, adică dacă între două rădăcini oarecare ale lui $f(x)$ există o rădăcină a lui $\varphi(x)$ şi între două rădăcini oarecare ale lui $\varphi(x)$ există o rădăcină a lui $f(x)$, atunci ecuaţia $\lambda f(x)+\mu\varphi(x)=0$ are toate rădăcinile reale pentru oricare λ şi μ reali.

***727.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinoamelor $F(x)=\lambda f(x)+\mu\varphi(x)$ sînt reale pentru oricare λ şi μ reali, atunci rădăcinile polinoamelor $f(x)$ şi $\varphi(x)$ se separă reciproc.

***728.** Să se demonstreze că dacă $f'(x)$ are toate rădăcinile reale şi distincte şi $f(x)$ nu are rădăcini multiple, atunci numărul rădăcinilor reale ale lui $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ este egal cu numărul rădăcinilor imaginare ale polinomului $f(x)$.

***729.** Să se demonstreze că dacă rădăcinile polinoamelor $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ sînt toate reale şi se separă, atunci rădăcinile derivatelor lor, de asemenea, se separă.

***730.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului $F(x)=\gamma f(x)+(\lambda+x)f'(x)$ sînt, de asemenea, reale pentru $\gamma>0$ sau $\gamma<-n$ şi pentru orice λ real.

***731.** Să se demonstreze că dacă polinomul

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

are numai rădăcini reale, iar polinomul

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+\ \dots\ +b_kx^k$$

are rădăcini reale situate toate înafara intervalului $(0, n)$ atunci toate rădăcinile polinomului

$$a_0\varphi(0)+a_1\varphi(1)x+a_2\varphi(2)x^2+\ \dots\ +a_n\varphi(n)x^n$$

sînt reale.

***732.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)=a_0+a_1(x)+\dots+a_nx^n$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului $a_0+a_1\gamma x+a_2\gamma(\gamma-1)x^2+\ \dots\ +a_n\gamma\,(\gamma-1)\dots$ $\dots(\gamma-n+1)\,x^n$ sînt, de asemenea, reale pentru $\gamma>n-1$.

***733.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)=a_0+a_1x+\ \dots\ +a_nx^n$ sînt reale, atunci și toate rădăcinile polinomului

$$a_0+\frac{\gamma}{\alpha}\,a_1x+\frac{\gamma(\gamma-1)}{\alpha(\alpha+1)}a_2x^2+\dots+\frac{\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-n+1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}\,a_nx^n,$$

sînt reale pentru $\gamma>n-1$, $\alpha>0$.

***734.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)=a_0+a_1x+\ \dots\ +a_nx^n$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului

$$a_0+a_1wx+a_2w^4x^2+\ \dots\ +a_nw^{n^2}x^n$$

sînt, de asemenea, reale pentru $0<w\leqslant 1$.

***735.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $a_0+a_1x+a_2x^2+\ \dots\ +a_nx^n$ sînt reale și de același semn, atunci toate rădăcinile polinomului $a_0\cos\varphi+a_1\cos(\varphi+\theta)x+a_2\times$ $\times\cos(\varphi+2\theta)x^2+\ \dots\ +a_n\cos\,(\varphi+n\theta x^n$ sînt reale.

***736.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului

$$(a_0+ib_0)+(a_1+ib_1)x+\ \dots\ +(a_n+ib_n)x^n$$

sînt cuprinse în semiplanul superior, atunci toate rădăcinile polinoamelor

$$a_0+a_1x+\dots\ +a_nx^n \text{ și } b_0+b_1x+\ \dots\ +b_nx^n$$

sînt reale și se separă reciproc (numerele a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_n sînt presupuse reale).

***737.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinoamelor $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ sînt reale și se separă reciproc, atunci părțile imaginare ale rădăcinilor lui $\varphi(x)+i\psi(x)$ au același semn.

***738.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)$ sînt cuprinse în semiplanul superior, atunci toate rădăcinile derivatei sale sînt, de asemenea, cuprinse în semiplanul superior.

***739.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului $f(x)$ sînt situate într-un semiplan oarecare atunci toate rădăcinile derivatei sînt situate în același semiplan.

***740.** Să se demonstreze că rădăcinile derivatei polinomului $f(x)$ sînt cuprinse în interiorul oricărui contur convex care cuprinde în interiorul său toate rădăcinile polinomului $f(x)$.

***741.** Să se demonstreze că dacă $f(x)$ este un polinom de gradul n cu rădăcini reale, atunci toate rădăcinile ecuației $[f(x)]^2+k^2[f'(x)]^2=0$ au partea imaginară mai mică decît kn în valoare absolută.

742. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinoamelor $f(x)-a$ și $f(x)-b$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului $f(x)-\lambda$ sînt, de asemenea, reale dacă λ este cuprins între a și b.

***743.** Să se demonstreze că pentru ca părțile reale ale tuturor rădăcinilor polinomului $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, cu coeficienți reali, să fie de același semn, este necesar și suficient ca rădăcinile polinoamelor

$$x^n-a_2x^{n-2}+a_4x^{n-4}-\ldots$$

și

$$a_1x^{n-1}-a_3x^{n-3}+\ldots$$

să fie reale și să se separe reciproc.

***744.** Să se găsească condițiile necesare și suficiente pentru ca părțile reale ale tuturor rădăcinilor ecuației cu coeficienți reali $x^3+ax^2+bx+c=0$ să fie negative.

***745.** Să se găsească condițiile necesare și suficiente pentru ca părțile reale ale tuturor rădăcinilor ecuației cu coeficienții reali $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ să fie negative.

***746.** Să se găsească condițiile necesare și suficiente pentru ca toate rădăcinile ecuației cu coeficienți reali $x^3+ax^2+bx+c=0$ să nu depășească în modul unitatea.

*747. Să se demonstreze că dacă $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$, atunci nici o rădăcină a polinomului $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ nu depășește în modul unitatea.

§ 10. Calculul aproximativ al rădăcinilor unui polinom

748. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 0,0001 rădăcina ecuației $x^3 - 3x^2 - 13x - 7 = 0$, cuprinsă în intervalul $(-1, 0)$.

749. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 0,000001 rădăcina reală a ecuației $x^3 - 2x - 5 = 0$.

750. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît, 0,0001 rădăcinile reale ale ecuațiilor

a) $x^3 - 10x - 5 = 0$; b) $x^3 + 2x - 30 = 0$;
c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$; d) $x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$.

751. Să se împartă o emisferă cu rază 1 în două părți cu ariile egale, printr-un plan paralel cu baza.

752. Să se calculeze, cu o eroare mai mică decît 0,0001, rădăcina pozitivă a ecuației $x^3 - 5x - 3 = 0$.

753. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 0,0001 rădăcina ecuației:
a) $x^4 + 3x^3 - 9x - 9 = 0$, cuprinsă în intervalul $(1, 2)$;
b) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$, cuprinsă în intervalul $(-1, 0)$;
c) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 3 = 0$, cuprinsă în intervalul $(0, 1)$;
d) $x^4 - 10x^2 - 16x + 5 = 0$, cuprinsă în intervalul $(0, 1)$;
e) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 10x - 10 = 0$, cuprinsă în intervalul $(-4, -3)$;
f) $x^4 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$, cuprinsă în intervalul $(1, 2)$;
g) $x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$, cuprinsă în intervalul $(-3, -2)$;
h) $x^4 - x^3 - 7x^2 - 8x - 6 = 0$, cuprinsă în intervalul $(3, 4)$;
i) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$, cuprinsă în intervalul $(1, 2)$.

754. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 0,0001 rădăcinile reale ale ecuațiilor:
a) $x^4 + 3x^3 - 4x - 1 = 0$; b) $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$;
c) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 1 = 0$; d) $x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3 = 0$;
e) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x - 1 = 0$; f) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4 = 0$;
g) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$; h) $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8 = 0$.

CAPITOLUL VI

FUNCŢII SIMETRICE

§ 1. Exprimarea funcţiilor simetrice prin funcţiile simetrice fundamentale. Calculul funcţiilor simetrice de rădăcinile unei ecuaţii algebriee

755. Să se exprime prin funcţiile simetrice fundamentale, polinoamele următoare:

a) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$;

b) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

c) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2$;

d) $x_1^5x_2^2+x_1^2x_2^5+x_1^5x_3^2+x_1^2x_3^5+x_2^5x_3^2+x_2^3x_3^5$;

e) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

f) $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^3+x_3^2)$;

g) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

h) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

756. Să se exprime prin funcţiile simetrice fundamentale

a) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$;

b) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$;

c) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$.

757. Să se exprime polinoamele simetrice simple de mai jos prin funcţiile simetrice fundamentale:

a) $x_1^2+\ldots$;
b) $x_1^3+\ldots$;
c) $x_1^2x_2x_3+\ldots$;
d) $x_1^2x_2^2+\ldots$;
e) $x_1^3x_2+\ldots$;
f) $x_1^4+\ldots$;
g) $x_1^2x_2^2x_3+\ldots$;
h) $x_1^3x_2x_3+\ldots$;
i) $x_1^3x_2^2+\ldots$;
j) $x_1^4x_2+\ldots$;
k) $x_1^5+\ldots$;
l) $x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots$;
m) $x_1^2x_2^2x_3^2+\ldots$;
n) $x_1^3x_2x_3x_4+\ldots$;
o) $x_1^3x_2^2x_3+\ldots$;
p) $x_1^3x_2^3+\ldots$;
r) $x_1^4x_2x_3+\ldots$;
s) $x_1^4x_2^2+\ldots$;
t) $x_1^5x_2+\ldots$;
u) $x_1^6+\ldots$

758. Să se exprime prin funcţiile simetrice fundamentale

a) $(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2+(x_1-x_2+x_3+\ldots+x_n)^2+(x_1+x_2-x_3+\ldots+x_n)^2+\ldots+(x_1+x_2+x_3+\ldots-x_n)^2$;

b) $(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)(x_1-x_2+x_3)+\ldots+$
$+x_n)\ldots(x_1+x_2+\ldots-x_n)$.

759. Să se exprime prin funcțiile simetrice fundamentale:

a) $\sum\limits_{i>k}(x_i-x_k)^2$; b) $\sum\limits_{i>k}(x_i+x_k)^3$;

c) $\sum\limits_{i>k}(x_i-x_k)^4$; d) $\sum\limits_{\substack{i>k\\ j\neq i;\ j\neq k}}(x_i+x_k-x_j)^2$.

760. Să se exprime prin funcțiile simetrice fundamentale, polinomul simetric simplu

$$x_1^2 x_2^2 \ldots x_k^2+\ldots$$

761. Să se exprime prin funcțiile simetrice fundamentale

$$\sum (a_1 x_{i_1}+a_2 x_{i_2}+\ldots+a_n x_{i_n})^2.$$

Suma se extinde la toate permutările posibile

$$i_1, i_2, \ldots, i_n \text{ ale indicilor } 1, 2, \ldots, n.$$

762. Să se exprime prin funcțiile simetrice fundamentale

a) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}$; b) $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_2+x_3}+\frac{(x_3-x_1)^2}{x_3+x_1}$;

c) $\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\right)$.

763. Să se exprime prin funcțiile simetrice fundamentale:

a) $\frac{x_1x_2}{x_3x_4}+\frac{x_1x_3}{x_2x_4}+\frac{x_1x_4}{x_2x_3}+\frac{x_2x_3}{x_1x_4}+\frac{x_2x_4}{x_1x_3}+\frac{x_3x_4}{x_1x_2}$;

b) $\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}+\frac{x_1+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_1+x_4}+\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3}+\frac{x_3+x_4}{x_1+x_2}$.

764. Să se exprime prin funcțiile simetrice fundamentale

a) $\sum\frac{1}{x_i}$; b) $\sum\frac{1}{x_i^2}$; c) $\sum\limits_{i\neq j}\frac{x_i}{x_j}$; d) $\sum\limits_{i\neq j}\frac{x_i^2}{x_j^2}$; e) $\sum\limits_{i\neq j}\frac{x_i^2}{x_j}$; f) $\sum\limits_{\substack{i\neq j\\ i\neq k\\ j>k}}\frac{x_jx_k}{x_i}$.

765. Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor ecuației

$$x^3+2x-3=0.$$

766. Să se calculeze $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+x_3^3x_1+x_3x_1^3$ pentru rădăcinile ecuației $x^3-x^2-4x+1=0$.

767. Să se determine valoarea funcției simetrice simple

$$x_1^3x_2x_3+\ldots$$

pentru rădăcinile ecuației

$$x^4+x^3-2x^2-3x+1=0.$$

768. Fie x_1, x_2, x_3 — rădăcinile ecuației $x^3+px+q=0$. Să se calculeze

a) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}$;

b) $x_1^4x_2^2+x_1^2x_2^4+x_2^4x_3^2+x_2^2x_3^4+x_3^4x_1^2+x_3^2x_1^4$;

c) $(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_2x_1)$;

d) $(x_1+x_2)^4(x_1+x_3)^4(x_2+x_3)^4$;

e) $\frac{x_1^2}{(x_2+1)(x_3+1)}+\frac{x_2^2}{(x_1+1)(x_3+1)}+\frac{x_3^2}{(x_1+1)(x_2+1)}$;

f) $\frac{x_1^2}{(x_1+1)^2}+\frac{x_2^2}{(x_2+1)^2}+\frac{x_3^2}{(x_3+1)^2}$.

769. Care este relația dintre coeficienții ecuației de gradul al treilea

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

dacă pătratul uneia dintre rădăcini este egal cu suma pătratelor celorlalte două?

770. Să se demonstreze că pentru ca toate rădăcinile ecuației de gradul al treilea $x^3+ax^2+bx+c=0$ să aibă părțile reale negative, este necesar și suficient să fie îndeplinite condițiile.

$$a>0;\ ab-c>0;\ c>0.$$

771. Să se afle aria și raza cercului circumscris triunghiului ale cărui laturi sînt egale cu rădăcinile ecuației de gradul al treilea

$$x^3-ax^2+bx-c=0.$$

***772.** Să se afle relația dintre coeficienții unei ecuații care admite ca rădăcini sinușii unghiurilor unui triunghi.

773. Să se calculeze valoarea funcției simetrice de rădăcini ale ecuației $f(x)=0$, în cazurile

a) $x_1^4x_2+\ldots$; $\quad f(x)=3x^3-5x^2+1$;

b) $x_1^3x_2^3+\ldots$; $\quad f(x)=3x^4-2x^3+2x^2+x-1$;

c) $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)(x_3^2+x_3x_1+x_1^2)$; $\quad f(x)=5x^3-6x^2+7x-8$.

774. Să se exprime prin coeficienții ecuației

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

următoarele funcții simetrice:

a) $a_0^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;

b) $a_0^4(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2)$;

c) $\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}+\dfrac{(x_1-x_3)^2}{x_1x_3}+\dfrac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3}$;

d) $a_0^4(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)(x_3^2+x_3x_1+x_1^2)$.

775. Fie $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului

$$x^n+x_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Să se demonstreze că un polinom simetric în $x_2, \ldots, x_n$ poate fi reprezentat sub forma de polinom în x_1.

776. Folosind rezultatul problemei 775, să se rezolve problemele 755 e), 755 g) 774 b), 774 d).

777. Să se afle $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}$, unde f_k este funcția simetrică fundamentală de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de rangul k.

778. Să presupunem că se cunoaște expresia funcției simetrice $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu ajutorul funcțiilor simetrice fundamentale. Să se afle expresia sumei $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, de asemenea, cu ajutorul funcțiilor simetrice fundamentale.

779. Să se demonstreze că dacă $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție simetrică care are proprietatea

$$F(x_1+a, x_2+a, \ldots, x_n+a)=F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

și dacă $\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este expresia ei cu ajutorul funcțiilor simetrice fundamentale, atunci

$$n\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}+(n-1)\, f_1\frac{\partial \Phi}{\partial f_2}+\ldots+f_{n-1}\frac{\partial \Phi}{\partial f_n}=0,$$

și, reciproc.

780. Să se demonstreze că orice polinom simetric și omogen de gradul al doilea care are proprietatea din problema 779 este egal cu $\alpha \sum_{i<k}(x_i-x_k)^2$, în care α este o constantă.

781. Să se afle forma generală a polinoamelor simetrice și omogene de gradul al treilea care au proprietatea din problema 779.

782. Să se exprime prin polinoamele simetrice fundamentale expresia

$$\sum_{i<j<k}(x_i-x_j)^2\,(x_i-x_k)^2\,(x_j-x_k)^2,$$

folosind rezultatul problemei 779.

783. Să se demonstreze că printre polinoamele simetrice $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ care au proprietatea

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=F(x_1+a, x_2+a, \ldots, x_n+a),$$

există $n-1$ polinoame fundamentale $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, care au proprietatea că orice polinom din clasa considerată poate fi exprimat sub formă de polinom de $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$.

784. Să se exprime cu ajutorul polinoamelor φ_2, φ_3 din problema 783 următoarele funcții simetrice:

a) $(x_1-x_2)^2\,(x_1-x_3)^2\,(x_2-x_3)^2$;

b) $(x_1-x_2)^4+(x_1-x_3)^4+(x_2-x_3)^4$.

785. Să se exprime cu ajutorul polinoamelor $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ din problema 783 următoarele funcții simetrice:

a) $(x_1+x_2-x_3-x_4)\,(x_1-x_2+x_3-x_4)\,(x_1-x_2-x_3+x_4)$;

b) $(x_1-x_2)^2\,(x_1-x_3)^2\,(x_1-x_4)^2\,(x_2-x_3)^2\,(x_2-x_4)^2\,(x_3-x_4)^2$.

§ 2. Sume de puteri

786. Să se afle expresiile sumelor de puteri s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, cu ajutorul polinoamelor simetrice fundamentale, folosind formulele lui Newton.

787. Să se exprime f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, cu ajutorul sumelor de puteri s_1, s_2, s_3, ..., folosind formulele lui Newton.

788. Să se afle s_5 pentru ecuația

$$x^6-4x^5+3x^3-4x^2+x+1=0.$$

789. Să se afle s_8 pentru ecuația

$$x^4-x^3-1=0.$$

790. Să se afle s_{10} pentru ecuația

$$x^3-3x+1=0.$$

791. Să se determine s_1, s_2, ..., s_n pentru rădăcinile ecuației

$$x^n+\frac{x^{n-1}}{1}+\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n!}=0.$$

792. Să se demonstreze că

$$a^k(x_1^k+x_2^k)=(-1)^k\left[b^k-\frac{k}{1}b^{k-2}ac+\frac{k(k-3)}{1\cdot 2}b^{k-4}a^2c^2-\right.$$
$$\left.-\frac{k(k-4)(k-5)}{1\cdot 2\cdot 3}b^{k-6}a^3c^3+\ldots\right],$$

dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0$.

793. Să se demonstreze că pentru orice ecuație de gradul al treilea :

$$\frac{s_1^5-s_5}{s_1^3-s_3}=\frac{5}{3}(f_1^2-f_2).$$

794. Să se demonstreze că dacă suma rădăcinilor unei ecuații de gradul al patrulea este egală cu 0, atunci

$$\frac{s_5}{5}=\frac{s_3}{3}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

795. Să se demonstreze că dacă pentru o ecuație de gradul al șaselea avem $s_1=s_3=0$, atunci

$$\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

796. Să se afle ecuațiile de gradul n pentru care

$$s_1=s_2=\ldots=s_{n-1}=0.$$

797. Să se afle ecuațiile de gradul n pentru care

$$s_2 = s_3 = \ldots = s_n = 0.$$

798. Să se afle o ecuație de gradul n pentru care

$$s_2 = 1,\ s_3 = s_4 = \ldots = s_n = s_{n+1} = 0.$$

799. Să se exprime $\sum_{i<j} x_i^k x_j^k$ prin sume de puteri.

***800.** Să se exprime $\sum_{i<j} (x_i + x_j)^k$ prin sume de puteri.

***801.** Să se exprime $\sum_{i<j} (x_i - x_j)^{2k}$ prin sume de puteri.

802. Să se demonstreze că

$$s_k = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & & \ldots & 0 \\ 2f_2 & f_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3f_3 & f_2 & f_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ kf_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \ldots & f_1 \end{vmatrix}.$$

803. Să se demonstreze că

$$f_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots & s_1 \end{vmatrix}.$$

804. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \ldots & 1 \\ s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s^n & s_{n-1} & s_{n-2} & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

***805.** Să se afle s_m pentru rădăcinile ecuației

$$X_n(x) = 0.$$

***806.** Să se demonstreze că pentru rădăcinile ecuației $X_n(x) = 0$, f_3, f și f_4 pot lua numai valorile 0 și ± 1.

***807.** Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= a \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 &= a \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n &= a \end{aligned}$$

și să se afle $x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \ldots + x_n^{n+1}$.

***808.** Să se calculeze sumele de puteri $s_1, s_2, \ldots, s_n$ pentru rădăcinile ecuației

$$x^n + (a+b)x^{n-1} + (a^2 + ab + b^2)\, x^{n-2} + \ldots \\ \ldots + (a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n) = 0.$$

***809.** Să se calculeze sumele de puteri $s_1, s_2, \ldots, s_n$ pentru rădăcinile ecuației

$$x^n + (a+b)\, x^{n-1} + (a^2 + b^2)\ x^{n-2} + \ldots + (a^n + b^n) = 0.$$

§ 3. Transformarea ecuațiilor

810. Să se găsească ecuațiile care admit rădăcinile:

a) $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_1$;
b) $(x_1 - x_2)^2$, $(x_2 - x_3)^2$, $(x_3 - x_1)^2$;
c) $x_1^2 - x_2x_3$, $x_2^2 - x_3x_1$, $x_3^2 - x_1x_2$;
d) $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$, $(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)$, $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$;
e) x_1^2, x_2^2, x_3^2; f) x_1^3, x_2^3, x_3^3,

unde x_1, x_2, x_3, sînt rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

811. Să se afle ecuația care admite ca rădăcini

$$(x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2)^3 \quad \text{și} \quad (x_1 + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon)^3,$$

unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, iar x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

812. Să se afle ecuația de gradul cel mai mic care are una dintre rădăcini egală cu $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}$, x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ și ai cărei coeficienți se exprimă rațional prin coeficienții acestei ecuații.

813. Să se afle ecuația de gradul cel mai mic, având una dintre rădăcini egală cu $\frac{x_1}{x_2}$, unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, astfel încît coeficienții ei să se exprime prin coeficienții acestei ecuații.

814. Să se afle ecuația de gradul cel mai mic al cărei coeficienți se exprimă rațional în funcție de coeficienții ecuației date $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, astfel încît una dintre rădăcinile ecuației căutate să fie:

a) $x_1x_2 + x_3x_4$; b) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$; c) x_1x_2;
d) $x_1 + x_2$; e) $(x_1 - x_2)^2$.

815. Folosind rezultatele problemelor 814 a) și 814 b) să se exprime rădăcinile unei ecuații de gradul al patrulea cu ajutorul rădăcinilor ecuației cubice auxiliare din problema 814 a).

816. Să se scrie formula pentru rezolvarea ecuației

$$x^4 - 6ax^2 + bx - 3a^2 = 0.$$

817. Să se formeze o ecuație care să aibă una dintre rădăcini egală cu

$$(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1)\times \\ \times(x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_1),$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sînt rădăcinile ecuației

$$x^5 + ax + b = 0.$$

§ 4. Rezultant și discriminant

***818.** Să se demonstreze că rezultantul polinoamelor

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad \text{și} \quad \varphi(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$$

este egal cu determinantul format din coeficienții resturilor din împărțirile succesive ale lui $\varphi(x)$, $x\varphi(x)$, $\ldots, x^{n-1}\varphi(x)$ prin $f(x)$. Se presupune că resturile sînt așezate în ordinea puterilor crescătoare ale lui x (metoda lui Hermite).

Observație. Restul $r_k(x)$ din împărțirea lui $x^{k-1}\varphi(x)$ cu $f(x)$ este egal cu restul din împărțirea lui $xr_{k-1}(x)$ cu $f(x)$.

***819.** Să se demonstreze că rezultantul polinoamelor

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

și

$$\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$$

este egal cu determinantul format din coeficienții următoarelor polinoame de gradul $n-1$ (sau mai mic):

$$\psi_k(x) = (a_0x^{k-1} + a_1x^{k-2} + \ldots + a_{k-1})\varphi(x) - (b_0x^{k-1} + b_1x^{k-2} + \ldots + b_{k-1})f(x);$$

$k = 1, \ldots, n$ (metoda lui Bézout).

Observație

$$\psi_1 = a_0\varphi - b_0f,$$
$$\psi_k = x\psi_{k-1} + a_{k-1}\varphi - b_{k-1}f.$$

***820.** Să se demonstreze că rezultatul polinoamelor

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

și

$$\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

pentru $n > m$ este egal cu determinantul format din coeficienții polinoamelor $\chi_k(x)$, de grad cel mult $n-1$, definite prin formulele:

$$\chi_k(x) = x^{k-1}\varphi(x) \text{ pentru } 1 \leqslant k \leqslant n-m,$$

$$\chi_k(x) = (a_0x^{k-n+m-1} + a_1x^{k-n+m-2} + \ldots + a_{k-n+m-1})x^{n-m}\varphi(x) - (b_0x^{k-n+m-1} + b_1x^{k-n+m-2} + \ldots + b_{k-n+m-1})f(x)$$

(polinoamele $\chi_k(x)$ sînt ordonate după puterile crescătoare ale lui x).

Observație.

$$\chi_{n-m+1} = a_0x^{n-m}\varphi(x) - b_0f(x),$$

$$\chi_k = x\chi_{k-1} + a_{k-n+m-1}x^{n-m}\varphi(x) - b_{k-n+m-1}f(x)$$

pentru $k > n-m+1$.

821. Să se calculeze rezultantul polinoamelor:

a) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ şi $2x^2 - x - 1$;
b) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ şi $x^2 + x + 3$;
c) $2x^3 - 3x^2 - x + 2$ şi $x^4 - 2x^2 - 3x + 4$;
d) $3x^3 + 2x^2 + x + 1$ şi $2x^3 + x^2 - x - 1$;
e) $2x^4 - x^3 + 3$ şi $3x^3 - x^2 + 4$;
f) $a_0x^2 + a_1x + a_2$ şi $b_0x^2 + b_1x + b_2$.

822. Pentru ce valori ale lui λ, polinoamele $\varphi(x)$ şi $f(x)$ admit o rădăcină comună:

a) $x^3 - \lambda x + 2$ şi $x^2 + \lambda x + 2$;
b) $x^3 - 2\lambda x + \lambda^3$ şi $x^2 + \lambda^2 - 2$;
c) $x^3 + \lambda x^2 - 9$ şi $x^3 + \lambda x - 3$?

823. Să se elimine x din sistemul de ecuaţii:

a) $x^2 - xy + y^2 = 3$; $x^2y + xy^2 = 6$;
b) $x^3 - xy - y^3 + y = 0$; $x^2 + x - y^2 - 1 = 0$;
c) $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 8$; $y = 2x^3 - 8x^2 + 5x + 2$.

824. Să se rezolve sistemele:

a) $y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0$,
$y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0$;
b) $y^2 + x^2 - y - 3x = 0$,
$y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12 = 0$;
c) $5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0$,
$y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0$;
d) $y^2 + (x - 4)y + x^2 - 2x + 3 = 0$,
$y^3 - 5y^2 + (x + 7)y + x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$;
e) $2y^3 - 4xy^2 - (2x^2 - 12x + 8)y + x^3 + 6x^2 - 16x = 0$,
$4y^3 - (3x + 10)y^2 - (4x^2 - 24x + 16)y - 3x^3 + 2x^2 - 12x + 40 = 0$.

825. Să se determine rezultantul polinoamelor

$$ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \text{ şi } a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

826. Să se demonstreze că

$$\mathfrak{R}(f, \varphi_1 \cdot \varphi_2) = \mathfrak{R}(f, \varphi_1) \cdot \mathfrak{R}(f, \varphi_2).$$

***827.** Să se afle rezultantul polinoamelor

$$X_n \text{ şi } x^m - 1.$$

*828. Să se afle rezultantul polinoamelor X_m și X_n.

829. Să se calculeze discriminantul polinomului

a) $x^3 - x^2 - 2x + 1$; b) $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$;
c) $3x^3 + 3x^2 + 5x + 2$; d) $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$;
e) $2x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 1$.

830. Să se calculeze discriminantul polinomului

a) $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - b$; b) $(x^2 - x + 1)^3 - \lambda(x^2 - x)^2$;
c) $ax^3 - bx^2 + (b - 3a)x + a$;
d) $x^4 - \lambda x^3 + 3(\lambda - 4)x^2 - 2(\lambda - 8)x - 4$.

831. Pentru ce valori ale lui λ polinoamele de mai jos au rădăcini multiple

a) $x^3 - 3x + \lambda$; b) $x^4 - 4x + \lambda$;
c) $x^3 - 8x^2 + (13 - \lambda)x - (6 + 2\lambda)$;
d) $x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda)x^2 + 2x - 2$?

832. Ce se poate spune despre numărul rădăcinilor reale ale unui polinom cu coeficienți reali, cunoscînd semnul discriminantului:

a) pentru un polinom de gradul al treilea;
b) pentru un polinom de gradul al patrulea;
c) în cazul general?

833. Să se calculeze discriminantul polinomului $x^n + a$.

*834. Să se calculeze discriminantul polinomului $x^n + px + q$.

*835. Să se calculeze discriminantul polinomului

$$a_0x^{m+n} + a_1x^m + a_2.$$

836. Cunoscîndu-se discriminantul polinomului

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

să se afle discriminantul polinomului

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

837. Să se demonstreze că descriminantul unui polinom de gradul al patrulea este egal cu discriminantul rezolventei sale Ferrari [problema 814 a) și problema 80].

838. Să se demonstreze că

$$D((x - a)f(x)) = D(f(x))[f(a)]^2.$$

***839.** Să se calculeze discriminantul polinomului

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1.$$

***840.** Să se calculeze discriminantul polinomului

$$x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a.$$

841. Să se demonstreze că discriminantul produsului a două polinoame este egal cu produsul discriminanţilor, înmulţit cu pătratul rezultantului lor.

842. Să se afle discriminantul polinomului

$$X_{pm} = \frac{x^{p^m} - 1}{x^{p^{m-1}} - 1}.$$

***843.** Să se afle discriminantul polinomnlui cercular X_n

***844.** Să se calculeze discriminantul polinomului

$$E_n = n!\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

***845.** Să se calculeze discriminantul polinomului

$$F_n = x^n + \frac{a}{1}x^{n-1} + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2} + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

***846.** Să se calculeze discriminantul polinomului lui Hermite :

$$P_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}.$$

***847.** Să se calculeze discriminantul polinomului lui Laguerre :

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

***848.** Să se calculeze discriminantul polinomului lui Cebîşev :

$$2\cos\left(n \arccos\frac{x}{2}\right).$$

***849.** Să se calculeze discriminantul polinomului :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(1 + x^2)^{n+1} \frac{d^n\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{dx^n}.$$

***850.** Să se calculeze discriminantul polinomului

$$P_n(x) = (-1)^n (1+x^2)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{dx^n}.$$

***851.** Să se calculeze discriminantul polinomului

$$P_n(x) = (-1)^n x^{2n+2} e^{-\frac{1}{x}} \frac{d^n \left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^n}.$$

***852.** Să se găsească maximul discriminantului polinomului

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

care are toate rădăcinile reale și legate prin relația

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(n-1) R^2.$$

853. Cunoscînd discriminantul lui $f(x)$, să se găsească discriminantul lui $f(x^2)$.

854. Cunoscînd discriminantul lui $f(x)$, să se găsească discriminantul lui $f(x^m)$.

855. Să se demonstreze că discriminantul lui $F(x) = f[\varphi(x)]$ este egal cu

$$[D(f)]^m \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x) - x_i),$$

unde m este gradul lui $\varphi(x)$, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile lui $f(x)$. Se presupune că coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt ai lui f și φ sînt egali cu 1.

§ 5. Transformarea lui Tschirnhaus și raționalizarea numitorului

856. Să se transforme ecuația $(x-1)(x-3)(x+4) = 0$, prin substituția $y = x^2 - x - 1$.

857. Să se transforme ecuațiile:

a) $x^3 - 3x - 4 = 0$ prin substituția $y = x^2 + x + 1$;
b) $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ prin substituția $y = x^2 + 1$;
c) $x^4 - x - 2 = 0$ prin substituția $y = x^3 - 2$;
d) $x^4 - x^3 - x^2 + 1 = 0$ prin substituția $y = x^3 + x^2 + x + 1$.

858. Să se aplice transformarea lui Tschirnhaus următoarelor ecuații și să se găsească transformările inverse

a) $x^3 - x + 2 = 0$, $y = x^2 + x$;
b) $x^4 - 3x + 1 = 0$, $y = x^3 + x$;
c) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 1 = 0$, $y = x^3 + 4x^2 + 3x - 1$.

859. Să se transforme ecuația $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ prin substituția $y = 2 - x^2$ și să se interpreteze rezultatul obținut.

860. Să se demonstreze că pentru ca rădăcinile unei ecuații de gradul al treilea cu coeficienți raționali să se exprime una prin alta în mod rațional și cu coeficienți raționali, este necesar și suficient ca discriminantul ecuației să fie pătratul unui număr rațional.

861. Să se raționalizeze numitorul expresiilor:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; b) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$; c) $\frac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$.

862. Să se raționalizeze numitorii expresiilor

a) $\frac{\alpha}{\alpha+1}$, $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$;

b) $\frac{\alpha^2 - 3\alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$, $\alpha^3 + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$;

c) $\frac{1}{3\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1}$ $\alpha^4 - \alpha^3 + 2\alpha + 1 = 0$;

d) $\frac{1}{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 2}$ $\alpha^4 + \alpha^3 - 4\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$.

863. Să se demonstreze că orice funcție rațională de rădăcina x_1 a ecuației de gradul al treilea $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ poate fi reprezentată sub forma $\frac{Ax_1 + B}{Cx_1 + D}$, unde coeficienții A, B, C, D se exprimă rațional prin coeficienții expresiei inițiale și prin coeficienții a, b, c.

864. Să presupunem că discriminantul unei ecuații de gradul al treilea cu coeficienți raționali, ireductibilă în corpul numerelor raționale, este pătratul unui număr rațional. In acest caz, între rădăcini putem stabili relația: $x_2 = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta}$. Care

este condiția pe care trebuie să o satisfacă coeficienții α, β, γ, δ?

865. Să se aplice ecuației

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

transformarea $y = x^2$.

866. Să se aplice ecuației

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

transformarea $y = x^3$.

***867.** Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile x_i ale polinomului

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_n \neq 0,$$

cu coeficienți întregi satisfac condiția $|x_i| \leqslant 1$, atunci toate sînt rădăcini ale unității.

§ 6. Polinoame invariante la permutări pare ale variabilelor. Polinoame invariante la permutări circulare ale variabilelor

868. Să se demonstreze că dacă un polinom este invariant la permutări pare ale variabilelor și își schimbă semnul la permutări impare, atunci el este divizibil cu determinantul Vandermonde al variabilelor, iar cîtul acestei împărțiri este un polinom simetric.

869. Să se demonstreze că orice polinom invariant la permutări pare ale variabilelor poate fi reprezentat sub forma

$$F_1 + F_2\Delta,$$

unde F_1 și F_2 sînt polinoame simetrice, iar Δ este determinantul Vandermonde al variabilelor.

870. Să se calculeze

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n+1} \end{vmatrix}.$$

871. Să se formeze ecuaţia care are ca rădăcini

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \quad \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_1 \quad \text{şi} \quad \alpha x_3 + \beta x_1 + \gamma x_2,$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

872. Să se formeze ecuaţia care are ca rădăcini

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1, \quad x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2,$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$, iar y_1, y_2, y_3 sînt rădăcinile ecuaţiei $y^3 + p'y + q' = 0$.

873. Pentru ca ecuaţiile cu coeficienţi raţionali

$$x^3 + px + q = 0,$$
$$y^3 + p'y + q' = 0$$

să fie legate printr-o transformare raţională a lui Tschirnhaus, este necesar şi suficient ca raportul discriminanţilor lor Δ şi Δ' să fie pătratul unui număr raţional şi ca una dintre ecuaţiile

$$u^3 = 3pp'u + \frac{27\,qq' \pm \sqrt{\Delta\Delta'}}{2}$$

să aibă o rădăcină raţională.

874. Să se demonstreze că orice polinom de n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, care rămîne invariant la permutări circulare ale variabilelor, poate fi reprezentat sub forma

$$\sum A f_1^{\alpha_0} \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \ldots \eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

unde $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ sînt formele liniare

$$\eta_1 = x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots + x_n,$$
$$\eta_2 = x_1\varepsilon^2 + x_2\varepsilon^4 + \ldots + x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta_{n-1} = x_1\varepsilon^{n-1} + x_2\varepsilon^{2n-2} + \ldots + x_n; \quad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

iar exponenţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ au astfel de valori încît $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\,\alpha_{n-1}$ este divizibil cu n.

875. Să se indice n funcţii fundamentale (fracţionare şi cu coeficienţi raţionali) pentru funcţiile raţionale invariante la permutări circulare ale variabilelor, prin care ele se exprimă toate raţional.

876. Să se indice trei funcții fundamentale cu coeficienți raționali pentru funcțiile raționale de trei variabile, care rămîn invarainte la permutări circulare.

877. Să se indice patru funcții fundamentale cu coeficienți raționali pentru funcțiile raționale de patru variabile, invariante la permutări circulare.

878. Să se indice cinci funcții fundamentale cu coeficienți raționali pentru funcțiile raționale de cinci variabile, invariante la permutări circulare ale variabilelor.

CAPITOLUL VII

ALGEBRĂ LINIARĂ

In acest capitol s-a adoptat următoarea terminologie și s-au folosit următoarele notații. Termenul „spațiu" înseamnă un spațiu vectorial peste corpul numerelor reale, dacă nu se face nici o mențiune. Acest termen se folosește independent de faptul că spațiul se consideră autonom sau ca o parte a unui alt spațiu mai vast. Totuși, în cazul cînd trebuie să subliniem acest fapt, se utilizează termenul de „subspațiu". Se numește varietate liniară mulțimea vectorilor de forma $X_0 + X$, unde X_0 este un vector fix, iar X parcurge mulțimea tuturor vectorilor unui anumit subspațiu.

Egalitatea $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ înseamnă că X are coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ într-o bază anumită a spațiului, iar în cazul cînd este vorba de un spațiu euclidian, se presupune că baza este ortonormată.

Vectorii sînt denumiți, uneori, puncte, varietățile cu o singură dimensiune — *drepte*, — iar cele cu două dimensiuni — *plane*.

§ 1. Subspații și varietăți liniare. Transformări de coordonate

879. Se dă spațiul vectorial generat de vectorii $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Să se determine baza și numărul dimensiunilor, cînd

a) $X_1 = (2, 1, 3, 1)$, $X_2 = (1, 2, 0, 1)$, $X_3 = (-1, 1, -3, 0)$;

b) $X_1 = (2, 0, 1, 3, -1)$, $X_2 = (1, 1, 0, -1, 1)$,
$X_3 = (0, -2, 1, 5, -3)$, $X_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$;

c) $X_1 = (2, 1, 3, -1)$, $X_2 = (-1, 1, -3, 1)$,
$X_3 = (4, 5, 3, -1)$, $X_4 = (1, 5, -3, 1)$.

880. Să se determine baza și numărul dimensiunilor sumei și intersecției spațiilor determinate de vectorii $X_1, \ldots, X_k$ și $Y_1, \ldots, Y_m$:

a) $X_1 = (1, 2, 1, 0)$, $Y_1 = (2, -1, 0, 1)$,
$X_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $Y_2 = (1, -1, 3, 7)$;

b) $X_1 = (1, 2, -1, -2)$, $Y_1 = (2, 5, -6, -5)$,
$X_2 = (3, 1, 1, 1)$, $Y_2 = (-1, 2, -7, -3)$,
$X_3 = (-1, 0, 1, -1)$;

c) $X_1 = (1, 1, 0, 0)$, $Y_1 = (0, 0, 1, 1)$,
$X_2 = (1, 0, 1, 1)$, $Y_2 = (0, 1, 1, 0)$.

881. Să se găsească coordonatele vectorului X în baza E_1, E_2, E_3, E_4:

a) $X = (1, 2, 1, 1)$, $E_1 = (1, 1, 1, 1)$, $E_2 = (1, 1, -1, -1)$,
$E_3 = (1, -1, 1, -1)$, $E_4 = (1, -1, -1, 1)$;

b) $X = (0, 0, 0, 1)$, $E_1 = (1, 1, 0, 1)$, $E_2 = (2, 1, 3, 1)$,
$E_3 = (1, 1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, -1, -1)$.

882. Să se stabilească formulele de transformare a coordonatelor cînd se trece de la baza E_1, E_2, E_3, E_4 la baza E'_1, E'_2, E'_3, E'_4

a) $E_1 = (1, 0, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1, 0)$,
$E_4 = (0, 0, 0, 1)$, $E'_1 = (1, 1, 0, 0)$, $E_2 = (1, 0, 1, 0)$,
$E_3 = (1, 0, 0, 1)$, $E'_4 = (1, 1, 1, 1)$;

b) $E_1 = (1, 2, -1, 0)$, $E_2 = (1, -1, 1, 1)$,
$E_3 = (-1, 2, 1, 1)$, $E_4 = (-1, -1, 0, 1)$, $E'_1 = (2, 1, 0, 1)$,
$E'_2 = (0, 1, 2, 2)$, $E'_3 = (-2, 1, 1, 2)$, $E'_4 = (1, 3, 1, 2)$.

883. Ecuația unei „suprafețe" în raport cu o bază $E_1, E_2, \ldots, E_4$ este de forma $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$. Să se găsească ecuația aceleiași suprafețe în raport cu baza

$$E'_1 = (1, 1, 1, 1); \quad E'_2 = (1, 1, -1, -1);$$

$$E'_3 = (1, -1, 1, -1); \quad E'_4 = (1, -1, -1, 1)$$

(coordonatele sînt date în aceeași bază $E_1, \ldots, E_4$).

***884.** Să se scrie formulele de transformare a coordonatelor în spațiul polinoamelor în cos x, de grad cel mult n, cînd se

trece dela baza $1, \cos x, \ldots, \cos^n x$ la baza $1, \cos x, \ldots, \cos nx$, și invers.

885. Să se afle în spațiul cu patru dimensiuni o dreaptă care trece prin origine și care intersectează dreptele:

$$x_1 = 2 + 3t, \quad x_2 = 1 - t, \quad x_3 = -1 + 2t, \quad x_4 = 3 - 2t$$

și

$$x_1 = 7t, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1 + t, \quad x_4 = -1 + 2t.$$

Să se afle punctele de intersecție ale acestei drepte cu dreptele date.

886. Să se demonstreze că două drepte oarecare din spațiul n — dimensional pot fi cufundate într-o varietate liniară tridimensională.

887. Să se studieze, în cazul general, condiția în care problema 885 poate fi rezolvată pentru două drepte din spațiul n — dimensional.

888. Să se demonstreze că două plane oarecare din spațiul n — dimensional pot fi cufundate într-o aceeași varietate liniară cu cinci dimensiuni.

889. Să se descrie toate pozițiile posibile a două plane în spațiul n — dimensional.

890. Să se demonstreze că o varietate liniară poate fi caracterizată ca o mulțime de vectori, care, împreună cu doi vectori oarecare X_1, X_2, conține combinațiile lor liniare $\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$ pentru orice α.

§ 2. Geometria elementară a spațiului euclidian n — — dimensional

891. Să se determine produsul scalar al vectorilor X și Y:

a) $X = (2, 1, -1, 2)$, $Y = (3, -1, -2, 1)$;
b) $X = (1, 2, 1, -1)$, $Y = (-2, 3, -5, -1)$.

892. Să se determine unghiul format de vectorii X și Y

a) $X = (2, 1, 3, 2)$, $Y = (1, 2, -2, 1)$;
b) $X = (1, 2, 2, 3)$, $Y = (3, 1, 5, 1)$;
c) $X = (1, 1, 1, 2)$, $Y = (3, 1, -1, 0)$.

893. Să se determine cosinușii unghiurilor dintre dreapta $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ și axele de coordonate.

894. Să se determine cosinușii unghiurilor interioare ale triunghiului ABC, definit prin coordonatele vîrfurilor:

$$A = (1, 2, 1, 2); \quad B = (3, 1, -1, 0); \quad C = (1, 1, 0, 1).$$

895. Să se găsească lungimile diagonalelor unui cub n — dimensional cu latura egală cu 1.

896. Să se găsească numărul diagonalelor unui cub n — dimensional, ortogonale cu o diagonală dată.

897. Să se găsească în spațiul n dimensional, n puncte cu coordonate pozitive sau nule, astfel încît distanțele lor la origine să fie egale cu 1. Să se dispună primul dintre aceste puncte pe prima axă de coordonate, al doilea — în planul determinat de primele două axe etc. (Împreună cu originea, aceste puncte formează vîrfurile unui simplex regulat, a cărui muchie are lungimea egală cu 1).

898. Să se determine coordonatele centrului și raza sferei circumscrise simplexului din problema 897.

899. Să se normeze vectorul (3, 1, 2, 1).

900. Să se găsească un vector normat, ortogonal cu vectorii (1, 1, 1, 1); (1, −1 −1, 1); (2, 1, 1, 3).

901. Să se construiască o bază ortogonală a spațiului care să conțină vectorii:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ și } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right).$$

902. Cu ajutorul procesului de ortogonalizare, să se găsească o bază ortogonală a spațiului de vectorii (1, 2, 1, 3); (4, 1, 1, 1); (3, 1, 1, 0).

903. Să se adauge la matricea

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 2, & 1 \\ 1, & 0, & 0, & 1, & -2 \\ 2, & 1, & -1, & 0, & 2 \end{pmatrix}$$

încă două linii ortogonale între ele și cu primele trei linii.

904. Să se interpreteze sistemul de ecuații liniare omogene

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

și sistemul său fundamental de soluții, în spațiul n — dimensional considerînd coeficienții fiecărei ecuații ca fiind coordonatele unui vector.

905. Să se găsească un sistem fundamental ortonormat de soluții pentru sistemul de ecuații:

$$3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

906. Să se descompună vectorul X într-o sumă de doi vectori, astfel încît unul dintre ei să fie cuprins în spațiul generat de vectorii $A_1, A_2, \ldots, A_m$, iar celălalt să fie ortogonal acestui spațiu (proiecție ortogonală și componentă ortogonală a vectorului X):

a) $X = (5, 2, -2, 2)$, $A_1 = (2, 1, 1, -1)$, $A_2 = (1, 1, 3, 0)$;

b) $X = (-3, 5, 9, 3)$, $A_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$A_2 = (2, -1, 1, 1)$, $A_3 = (2, -7, -1, -1)$.

907. În ipoteza că vectorii $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sînt liniar independenți, să se dea formulele pentru calculul lungimilor componentelor vectorului din problema 906, tratînd-o în cazul general.

908. Să se demonstreze că dintre toți vectorii unui spațiu dat P, proiecția ortogonală a vectorului X pe spațiul P formează unghiul cel mai mic cu un vector dat X.

909. Să se găsească cel mai mic unghi dintre vectorul X și vectorii spațiului P, generat de vectorii $A_1, \ldots, A_m$

a) $X = (1, 3, -1, 3)$, $A_1 = (1, -1, 1, 1)$, $A_2 = (5, 1, -3, 3)$,

b) $X = (2, 2, -1, 1)$, $A_1 = (1, -1, 1, 1)$,
$A_2 = (-1, 2, 3, 1)$, $A_3 = (1, 0, 5, 3)$.

910. Să se găsească unghiul cel mai mic format de vectorul $(1, 1, \ldots, 1)$ cu vectorii unui subspațiu m — dimensional.

911. Să se demonstreze că dintre toți vectorii $X - Y$, unde X este un vector dat, iar Y parcurge un spațiu dat P, vectorul $X - X'$, unde X' este proiecția ortogonală a lui X pe P, are lungimea minimă. (Această lungime minimă se numește distanța de la punctul X la spațiul P).

912. Să se determine distanța de la punctul X pînă la varietatea liniară $A_0 + t_1A_1 + \ldots + t_mA_m$:

a) $X = (1, 2, -1, 1)$, $A_0 = (0, -1, 1, 1)$,
$A_1 = (0, -3, -1, 5)$, $A_2 = (4, -1, -3, 3)$;

b) $X = (0, 0, 0, 0)$, $A_0 = (1, 1, 1, 1)$,
$A_1 = (1, 2, 3, 4)$.

913. Se consideră spațiul polinoamelor de grad cel mult n. Produsul scalar al polinoamelor f_1, f_2 se definește prin integrala $\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$.

Să se determine distanța de la origine la varietatea liniară formată din polinoamele $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.

914. Să se găsească o metodă de determinare a distanței minime dintre punctele a două varietăți liniare $X_0 + P$ și $Y_0 + Q$.

915. Vîrfurile unui simplex regulat n — dimensional (v. problema 897), cu muchia egală cu 1, sînt împărțite în două clase: una formată din $m + 1$ vîrfuri, iar alta formată din $n - m$ vîrfuri. Prin aceste clase de vîrfuri sînt duse varietățile liniare cu numărul cel mai mic de dimensiuni posibile. Să se determine distanța minimă dintre punctele acestor două varietăți și să se determine punctele pentru care această distanță minimă este realizată.

* **916.** In spațiul cu patru dimensiuni sînt date două plane, determinate de vectorii A_1, A_2 și B_1, B_2. Să se găsească cel mai mic dintre unghiurile formate de vectorii din primul plan cu vectorii din planul al doilea:

a) $A_1 = (1, 0, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0, 0)$, $B_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$B_2 = (2, -2, 5, 2)$;

b) $A_1 = (1, 0, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0, 0)$, $B_1 = (1, 1 1, 1)$,
$B_2 = (1, -1, 1, -1)$.

***917.** Un cub cu patru dimensiuni este intersectat de un „plan" tridimensional, care trece prin centrul cubului și este ortogonal pe diagoanlă. Să se determine forma corpului obținut ca secțiune.

***918.** Se dă un sistem de vectori liniar independenți B_1, B_2, ..., B_m. Mulțimea punctelor, care sînt extremitățile vectorilor de forma $t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots + t_mB_m$, $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$, ...,

$0 \leqslant t_m \leqslant 1$, se numește paralelipipedul construit pe vectorii $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Definim volumul paralelipipedului prin inducție, ca volumul „bazei" $[B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}]$, înmulțit cu înălțimea egală cu distanța de la extremitatea vectorului B_m la spațiul determinat de bază. „Volumul paralelipipedului" cu o singură dimensiune $[B_1]$ este considerat egal cu lungimea vectorului B_1.

a) Să se stabilească formula pentru calculul pătratului volumului și să se arate că volumul nu depinde de modul de numerotare a vîrfurilor.

b) Să se demonstreze că $V[cB_1, B_2, \ldots, B_m] = |c| \times V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$.

c) Să se demonstreze că $V[B_1' + B_1'', B_2, \ldots, B_m] \leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m] + V[B_1'', B_2, \ldots, B_m]$ și să se stabilească cînd are loc egalitatea.

919. Să se demonstreze că volumul unui paralelipiped cu n dimensiuni din spațiul n — dimensional este egal cu valoarea absolută a determinantului format din coordonatele vectorilor care generează paralelipipedul.

***920.** Fie $C_1, C_2, \ldots, C_m$ proiecțiile ortogonale ale vectorilor $B_1, B_2, \ldots, B_m$ pe un anumit spațiu. Să se demonstreze că

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

***921.** Să se demonstreze că

$$V[A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] \leqslant V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k]$$

(compară cu problema 518 din capitolul IV).

922. Să se demonstreze că

$$V[A_1, A_2, \ldots, A_m] \leqslant |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_m|$$

(compară cu problema 519 din capitolul IV).

923. Să se găsească volumul unei sfere n — dimensionale, folosind principiul lui Cavalieri.

924. Se consideră spațiul polinoamelor de grad cel mult n, luînd ca produs scalar integrala $\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$.

Să se găsească volumul paralelipipedului format de vectorii acelei baze, față de care coordonatele unui polinom sînt chiar coeficienții lui.

§ 3. Valorile caracteristice și vectorii proprii ai unei matrice

925. Să se găsească valorile caracteristice și vectorii proprii ai matricelor

a) $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 5, & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0, & a \\ -a, & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 5, & 6, & -3 \\ -1, & 0, & 1 \\ 1, & 2, & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2, & -1, & 2 \\ 5, & -3, & 3 \\ -1, & 0, & -2 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 0, & 2, & 1 \\ -2, & 0, & 3 \\ -1, & -3, & 0 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 3, & 1, & 0 \\ -4, & -1, & 0 \\ 4, & -8, & -2 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 2, & 5, & -6 \\ 4, & 6, & -9 \\ 3, & 6, & -8 \end{pmatrix}$.

926. Cunoscînd valorile caracteristice ale matricei A, să se găsească valorile caracteristice ale matricei A^{-1}.

927. Cunoscînd valorilec aracteristice ale matricei A, să se găsească valorile caracteristice ale matricei A^2.

928. Cunoscînd valorile caracteristice ale matricei A, să se găsească valorile caracteristice ale matricei A^m.

929. Cunoscînd polinomul caracteristic $F(\lambda)$ al matricei A (de ordinul n), să se găsească determinantul matricei $f(A)$, în cazul cînd $f(x) = b_0(x - \xi_1)(x - \xi_2)\ldots(x - \xi_m)$.

930. Cunoscînd valorile caracteristice ale matricei A, să se afle determinantul matricei $f(A)$, cînd $f(x)$ este un polinom.

931. Cunoscînd valorile caracteristice ale matricei A, să se găsească valorile caracteristice ale matricei $f(A)$.

932. Să se demonstreze că toți vectorii proprii ai matricei A sînt vectori proprii ai matricei $f(A)$.

***933.** Să se găsească valorile caracteristice ale matricei

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & \varepsilon, & \varepsilon^2, & \ldots, & \varepsilon^{n-1} \\ 1, & \varepsilon^2, & \varepsilon^4, & \ldots, & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \varepsilon^{n-1}, & \varepsilon^{2(n-1)}, & \ldots, & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, n, fiind un număr impar.

***934.** Să se calculeze suma

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \ldots + \varepsilon^{(n-1)^2}.$$

935. Să se găsească valorile caracteristice alé matricelor

a) $\begin{pmatrix} 0, & x, & x, & \ldots, & x \\ y, & 0, & x, & \ldots, & x \\ y, & y, & 0, & \ldots, & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y, & y, & y, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ a_n, & a_1, & \ldots, & a_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2, & a_3, & \ldots, & a_1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

***936.** Cunoscînd valorile caracteristice ale matricelor A și B, să se găsească valorile caracteristice ale produsului lor kroneckerian.

937. Să se demonstreze că polinoamele caracteristice ale matricelor AB și BA coincid pentru orice matrice pătrate A și B.

938. Să se demonstreze că polinoamele caracteristice ale matricelor AB și BA diferă numai prin factorul $(-\lambda)^{n-m}$, în cazul cînd A este o matrice dreptunghiulară cu m linii și n coloane, iar B, o matrice cu n linii și m coloane ($n > m$).

§ 4. Forme pătratice și matrice simetrice

939. Să se reducă la o sumă de pătrate formele pătratice

a) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$;

b) $x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2$;

c) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;

d) $x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+x_2^2+2x_2x_3-4x_2x_4+x_3^2-2x_4^2$;

e) $x_1^2+x_1x_2+x_3x_4$.

940. Să se reducă forma pătratică

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<k} x_ix_k$$

la forma diagonală.

941. Să se reducă la forma diagonală următoarea formă pătratică:

$$\sum_{i<k} x_i x_k.$$

942. Să se demonstreze că toți minorii principali ai unei forme pătratice pozitiv definite sînt pozitivi.

***943.** Să presupunem că forma pătratică

$$\begin{aligned} f = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

poate fi adusă la forma diagonală $a_1x_1'^2 + a_2x_2'^2 + \ldots + a_nx_n'^2$, prin transformarea „triunghiulară"

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n \\ x_2' &= \quad x_2 + \ldots + b_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \quad\quad\quad x_n. \end{aligned}$$

Se cere:

a) să se exprime coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prin coeficienții a_{ik};

b) să se exprime discriminanții formelor $f_k(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f - a_1'x_1'^2 - \ldots - a_k'x_k'^2$ prin coeficienții a_{ik}.

Să se găsească condițiile în care transformarea triunghiulară de forma indicată este posibilă.

944. Să se demonstreze că pentru ca forma pătratică

$$\begin{aligned} f = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

să fie pozitiv definită, este necesar și suficient să fie satisfăcute inegalitățile

$$a_{11} > 0;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0;\ \ldots;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

(condițiile lui Sylvester)

***945.** Să se demonstreze că dacă la o formă pătratică pozitivă adăugăm pătratul unei forme liniare, atunci discriminantul ei se mărește.

***946.** Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \ldots$ o formă pătratică pozitivă,

$$\varphi(x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n),$$

iar D_f și D_φ discriminanții lor.

Să se demonstreze că

$$D_f \leqslant a_{11}D_\varphi.$$

947. Fie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \ldots - l_{p+q}^2,$$

unde $l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \ldots, l_{p+q}$ sînt forme liniare reale în $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Să se demonstreze că numărul pătratelor pozitive din forma canonică a formei f este cel mult p, iar numărul pătratelor negative este cel mult q.

***948.** Fie $s_0, s_1, \ldots$ sumele de puteri ale rădăcinilor ecuației $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ cu coeficienți reali. Să se demonstreze că numărul pătratelor negative din reprezentarea canonică a formei $\sum_{i,k=1}^{n} s_{i+k+2}x_ix_k$ este egal cu numărul perechilor de rădăcini complex conjugate ale ecuației date.

949. Să se demonstreze că pentru ca toate rădăcinile unei ecuații cu coeficienți reali să fie reale și distincte, este necesar și suficient să fie satisfăcute inegalitățile:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0; \quad \ldots; \quad \Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} > 0.$$

***950.** Să se demonstreze că dacă formele pătratice

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

și

$$\varphi = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \ldots + b_{1n}x_1x_n + \\ + b_{21}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 + \ldots + b_{2n}x_2x_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + b_{n1}x_nx_1 + b_{n2}x_nx_2 + \ldots + b_{nn}x_n^2$$

nu iau valori negative, atunci nici forma

$$(f, \varphi) = a_{11}b_{11}x_1^2 + a_{12}b_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}b_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}b_{21}x_2x_1 + a_{22}b_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}b_{2n}x_2x_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n1}b_{n1}x_nx_1 + a_{n2}b_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}b_{nn}x_n^2$$

nu ia valori negative

951. Să se aducă la forma canonică printr-o transformare ortogonală, formele pătratice:

a) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
b) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
c) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
d) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
e) $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
f) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;
g) $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;
h) $7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$;
i) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$;
j) $2x_1x_2 + 2x_3x_4$;
k) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$;
l) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$;
m) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$;
n) $8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$.

952. Să se aducă la forma canonică, printr-o transformare ortogonală, formele pătratice

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<k} x_ix_k$; b) $\sum_{i<k} x_ix_k$.

953. Să se aducă la forma canonică, printr-o transformare ortogonală, forma pătratică

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n.$$

954. Să se demonstreze că dacă toate valorile caracteristice ale matricei simetrice reale A sînt cuprinse în intervalul închis $[a, b]$, atunci forma pătratică cu matricea $A-\lambda E$ este negativă pentru $\lambda > b$ și pozitivă pentru $\lambda < a$. Este adevărată și teorema reciprocă.

955. Să se demonstreze că dacă toate valorile caracteristice ale unei matrice simetrice reale A sînt cuprinse în intervalul închis $[a, c]$, iar toate valorile caracteristice ale matricei simetrice reale B sînt cuprinse în intervalul închis $[b, d]$, atunci toate valorile caracteristice ale matricei $A+B$ sînt cuprinse în intervalul închis $[a+b, c+d]$.

956. Numim valoare artimetică a rădăcinii pătrate din cea mai mare valoare caracteristică a matricei $\overline{A}A$ (A fiind o matrice pătrată reală, iar $\overline{A}$ transpusa ei) — norma matricei A și o notăm cu $\|A\|$.

Să se demonstreze că:

a) $\|A\| = \|\overline{A}\|$;

b) $|AX| \leqslant \|A\| \cdot |X|$, egalitatea avînd loc pentru un anumit vector X_0;

c) $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;

d) $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$;

e) Modulele tuturor valorilor caracteristice ale matricei A nu depășesc pe $\|A\|$.

957. Să se demonstreze că orice matrice reală nesingulară poate fi reprezentată ca produs al unei matrice ortogonale cu o matrice triunghiulară de forma

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix},$$

elementele b_{ii} de pe diagonală fiind pozitive și că această reprezentare este unică.

958. Să se demonstreze că orice matrice reală nesingulară poate fi reprezentată ca produsul dintre o matrice ortogonală și o matrice simetrică, care corespunde unei forme pătratice pozitive.

959. Să considerăm o „suprafață" de ordinul al doilea în spațiul n—dimensional, definită prin ecuația:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+\\ &+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{2n}x_2x_n+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\ldots+a_{nn}x_n^2+\\ &+2b_1x_1+2b_2x_2+\ldots+2b_nx_n+c=0, \end{aligned}$$

sau, mai pe scurt, $AX \cdot X + 2B \cdot X + c = 0$.

Să se demonstreze că pentru ca suprafața să aibă centru, este necesar și suficient ca rangul matricei A să fie egal cu rangul matricei (A, B).

960. Să se demonstreze că ecuația unei suprafețe de ordinul al doilea, cu centru, poate fi adusă la forma canonică

$$\alpha_1x_1^2+\ldots+\alpha_rx_r^2+\gamma=0$$

prin translația originii și printr-o transformare ortogonală.

961. Să se demonstreze că ecuația unei suprafețe de ordinul al doilea, fără centru, poate fi adusă la forma canonică

$$\alpha_1x_1^2+\ldots+\alpha_rx_r^2=2x_{r+1},$$

prin translația originii și printr-o transformare ortogonală.

§ 5. Transformări liniare. Forma canonică Jordan

962. Să se arate că numărul dimensiunilor subspațiului în care se transformă spațiul total printr-o transformare liniară, este egal cu rangul matricei acestei transformări.

963. Fie Q un subspațiu q —dimensional al unui spațiu R —n dimensional, iar Q'— imaginea lui Q printr-o transformare de rangul r a spațiului R. Să se demonstreze că numărul dimensiunilor spațiului Q' verifică inegalitățile

$$q+r-n \leqslant q' \leqslant \min(q, r).$$

964. Folosind rezultatul problemei 963, să se arate, că rangul ρ al produsului a două matrice de rang, respectiv, r_1 și r_2 satistace inegalitățile

$$r_1 + r_2 - n \leqslant \rho \leqslant \min(r_1, r_2).$$

***965.** Fie Q și Q' două subspații complementare ale spațiului P. Atunci, orice vector $X \in P$ se descompune în mod unic în suma vectorilor $Y \in Q$ și $Y' \in Q'$. Transformarea prin care se trece de la vectorul X la componenta sa Y se numește proiecție pe Q paralel cu Q'. Să se demonstreze că operația de proiecție este o transformare liniară și că matricea sa A (într-o bază oarecare) satisface condiția $A^2 = A$. Reciproc, orice transformare liniară a cărei matrice satisface condiția $A^2 = A$ este o operație de proiectare.

***966.** Proiecția se numește ortogonală, dacă $Q' \perp Q$. Să se demonstreze că în orice bază ortonormată matricea unei proiecții ortogonale este simetrică. Reciproc, orice matrice simetrică idempotentă este matricea unei proiecții ortogonale.

***967.** Să se demonstreze că toate valorile caracteristice diferite de 0 ale unei matrice antisimetrice sînt pur imaginare, iar părțile reală și imaginară ale vectorilor proprii corespunzători sînt egale în lungime și ortogonale.

***968.** Să se demonstreze că pentru o matrice antisimetrică A putem găsi o matrice ortogonală P, astfel încît

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & a_2 & & & & \\ & & -a_2 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & a_k & \\ & & & & & -a_k & 0 & \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(toate elementele nescrise sînt nule; $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sînt numere reale).

969. Să se demonstreze că dacă A este o matrice antisimetrică, atunci matricea $(E-A)(E+A)^{-1}$ este o matrice

ortogonală care nu are pe -1 ca valoare caracteristică. Reciproc, orice matrice ortogonală care nu are valoarea caracteristică -1 poate fi reprezentată sub această formă.

***970.** Să se demonstreze că modulele tuturor valorilor caracteristice ale unei matrice ortogonale sînt egale cu 1.

***971.** Să se demonstreze că vectorii proprii ai unei matrice ortogonale care aparțin unei valori caracteristice complexe sînt de forma $X + iY$, în care X, Y sînt vectori reali avînd lungimi egale și ortogonali între ei.

***972.** Să se demonstreze că orice matrice ortogonală poate fi reprezentată sub forma

$$Q^{-1}TQ,$$

unde Q este o matrice ortogonală, iar T are forma:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & & & & \\ & & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & & & & & \\ & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

(toate elementele nescrise sînt nule),

973. Să se aducă la forma normală Jordan matricele:

a) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ -2, & -2, & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4, & 6, & 0 \\ -3, & -5, & 0 \\ -3, & -6, & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 13, & 16, & 16 \\ -5, & -7, & -6 \\ -6, & -8, & -7 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3, & 0, & 8 \\ 3, & -1, & 6 \\ -2, & 0, & -5 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -4, & 2, & 10 \\ -4, & 3, & 7 \\ -3, & 1, & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7, & -12, & -2 \\ 3, & -4, & 0 \\ -2, & 0, & -2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -2, & 8, & 6 \\ -4, & 10, & 6 \\ 4, & -8, & -4 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0, & 3, & 3 \\ -1, & 8, & 6 \\ 2, & -14, & -10 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -1, & 1, & 1 \\ -5, & 21, & 17 \\ 6, & -26, & -21 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 8, & 30, & -14 \\ -6, & -19, & 9 \\ -6, & -23, & 11 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 4, & 5, & -2 \\ -2, & -2, & 1 \\ -1, & -1, & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 3, & 7, & -3 \\ -2, & -5, & 2 \\ -4, & -10, & 3 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 9, & 22, & -6 \\ -1, & -4, & 1 \\ 8, & 16, & -5 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 1, & -1, & 2 \\ 3, & -3, & 6 \\ 2, & -2, & 4 \end{pmatrix}$; o) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -1 \\ -3, & -3, & 3 \\ -2, & -2, & 2 \end{pmatrix}$.

974. Să se aducă la forma normală Jordan matricele:

a) $\begin{pmatrix} 3, & 1, & 0, & 0 \\ -4, & -1, & 0, & 0 \\ 7, & 1, & 2, & 1 \\ -17, & -6, & -1, & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 0, & 1, & 2, & 3 \\ 0, & 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0, 1, 0, \ldots, 0 \\ 0, 0, 1, \ldots, 0 \\ \ldots\ldots \\ 0, 0, 0, \ldots, 1 \\ 1, 0, 0, \ldots, 0 \end{pmatrix}$

***975.** Să se demonstreze că orice matrice periodică A (care satisface condiția $A^m = E$ pentru un m întreg pozitiv) se poate aduce la o formă canonică diagonală.

***976.** Cunoscînd valorile caracteristice ale matricei A, să se găsească valorile caracteristice ale matricei A_m formată din minorii de ordinul m ai matricei A așezați în mod corespunzător (v. problema 531, cap. IV).

977. Să se demonstreze că orice matrice poate fi transformată în transpusa ei.

***978.** Să se demonstreze că orice matrice poate fi reprezentată ca produs a două matrice simetrice, dintre care una este nesingulară.

979. Plecînd de la o matrice dată A de ordinul n, construim un şir de matrice prin următorul proces:

$$A_1=A\,; \quad SpA_1=p_1\,; \quad A_1-p_1E_1=B_1,$$

$$B_1A=A_2\,; \quad \frac{1}{2}SpA_2=p_2\,; \quad A_2-p_2E=B_2,$$

$$B_2A=A_3\,; \quad \frac{1}{3}SpA_3=p_3\,; \quad A_3-p_3E=B_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{n-1}A=A_n\,; \quad \frac{1}{n}SpA_n=p_n\,; \quad A_n-p_nE=B_n.$$

Să se demonstreze că $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sînt coeficienţii polinomului caracteristic al matricei A scris în forma $(-1)^n \times [\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n]$; matricea B_n este matricea nulă; în sfîrşit, dacă A este nesingulară, atunci $\frac{1}{p_n}B_{n-1}=A^{-1}$.

***980.** Să se demonstreze că pentru ca ecuaţia $XY-YX=C$ să fie rezolvabilă în matricele pătrate X, Y, este necesar şi suficient ca urma matricei C (adică suma elementelor de pe diagonala ei principală) să fie nulă.

---

*) SpA înseamnă „urma" matricei A, adică suma elementelor de pe diagonala principală (N. R.).

PARTEA A DOUA

INDICAȚII

CAPITOLUL I

NUMERE COMPLEXE

11. V. problema 10.

13. Se arată că teorema este adevărată pentru fiecare dintre cele patru operații cu două numere și se folosește metoda inducției complete.

18. Se va folosi faptul că membrii din stînga pot fi reprezentați ușor sub formă de sumă de două pătrate.

27. Se va pune $x = a + bi$; $y = c + di$.

28. Se va pune $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$.

31. Se va pune $z = t^2$; $z' = t'^2$. Apoi se folosește rezultatul de la problema 27.

37. Se va trece la forma trigonometrică.

38. $1 + \omega = -\omega^2$.

40. Se va trece la unghiul pe jumătate.

41. Se va observa că $z = \cos\theta \pm i \sin\theta$; $\frac{1}{z} = \cos\theta \mp i \sin\theta$ și se va folosi formula lui Moivre.

51. Se pune $\alpha = \cos x + i \sin x$. Atunci, $\cos^{2m} x = \left(\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}\right)^{2m}$ etc.

52. Se arată că coeficientul termenului $(2\cos x)^{m-2p}$ este egal cu $(-1)^p (C_{m-p}^{p} + C_{m-p-1}^{p-1})$. Se va folosi metoda inducției complete.

53. Problema este analogă cu cea precedentă.

54. Se va folosi dezvoltarea expresiei $(1 + i)^n$ după binomul lui Newton.

55. Se va folosi rezultatul de la problema precedentă.

56. Se dezvoltă după binomul lui Newton expresia $\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$.

68. Problema se reduce la calculul limitei sumei $1+\alpha+\alpha^2+\ldots$ unde $\alpha=\frac{-1+i}{2}$.

69. Se aplică identitatea $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\alpha}{2}$.

71. Se folosesc identităţile $\cos^3\alpha=\frac{\cos 3\alpha}{4}+\frac{3\cos\alpha}{4}$;

$$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha}{4}-\frac{\sin 3\alpha}{4}.$$

72. Pentru a calcula sume de forma $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}$ şi $1+2^2a+3^2a^2+\ldots+n^2a^{n-1}$ este bine să le înmulţim în prealabil cu $1-a$.

76. $x_1=\alpha+\beta$; $x_2=\alpha\omega+\beta\omega^2$; $x_3=\alpha\omega^2+\beta\omega$;

$$\alpha^3+\beta^3=-q;\quad 3\alpha\beta=-p.$$

77. Se va înmulţi cu -27 şi se va considera membrul întîi ca discriminantul unei ecuaţii de gradul al treilea.

78. Se pune $x=\alpha+\beta$.

87. Se arată că $\varepsilon^n=-1$.

88. Dacă $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, atunci suma căutată poate fi scrisă astfel: $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}$.

89. Se vor examina două cazuri: 1) k este divizibil cu n; 2) k nu este divizibil cu n.

91. Se va înmulţi cu $1-\varepsilon$.

92. Se va înmulţi cu $1-\varepsilon$.

94. a) Din suma tuturor rădăcinilor de ordinul al 15-lea ale unităţii se va scădea suma rădăcinilor care aparţin indicilor 1, 3 şi 5.

97. Lungimea laturii poligonului regulat cu 14 laturi, înscris în cercul de rază 1, este egală cu $2\sin\frac{\pi}{14}$. Se va folosi faptul că ecuaţia $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ este satisfăcută de $\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$.

98. 1) Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, atunci $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1)\ldots(x - x_n)$. 2) Dacă ε este o rădăcină de ordinul n a unității, atunci $\bar{\varepsilon}$, conjugatul lui ε este de asemenea o rădăcină de ordinul n a unității.

99. In identitățile obținute la rezolvarea problemei 98 se va pune $x = 1$.

100. Se folosește descompunerea binomului $x^n - 1$ în produs de factori de gradul întîi.

101. In descompunerea lui $x^n - 1$ într-un produs de factori liniari se pune: 1) $x = \cos\theta + i\sin\theta$; 2) $x = \cos\theta - i\sin\theta$.

103. Se va folosi faptul că două numere complex conjugate sînt egale în modul.

105. a) Se aduce ecuația la forma $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m = 1$.

107. Fie

$$S = \cos\varphi + C_n^1 \cos(\varphi + \alpha)\, x + \ldots + \cos(\varphi + n\alpha)\, x^n,$$

$$T = \sin\varphi + C_n^1 \sin(\varphi + \alpha)\, x + \ldots + \cos(\varphi + n\alpha)\, x^n.$$

Se calculează $S + Ti$ și $S - Ti$ și se determină S din egalitățile obținute.

113. Se demonstrează întîi că $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ dacă p este un număr prim. In acest scop se va determina numărul numerelor care nu depășesc pe p^α și care sînt divizibile cu p.

116. Se demonstrează că toate rădăcinile polinomului $x^{p^{m-1}} - 1$ și numai ele nu sînt rădăcini primitive ale polinomului $x^{p^m} - 1$.

117. Se va arăta că dacă n este un număr impar, atunci pentru a obține toate rădăcinile primitive de ordinul $2n$ ale unității este suficient să înmulțim cu -1 toate rădăcinile primitive de ordinul n.

119. Se va uziliza rezultatul problemei 118.

120. Se vor utiliza problemele 115, 116, 111, arătîndu-se că 1) $\mu(p) = -1$, dacă p este prim; 2) $\mu(p^\alpha) = 0$, dacă p este prim, iar $\alpha > 1$; 3) $\mu(ab) = \mu(a)\,\mu(b)$, dacă a și b sînt prime între ele.

122. Se va arăta că dacă $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ aparține

imdicelui n_1, atunci $x - \varepsilon_k$ intră la puterea $\Sigma \mu(d_1)$ în membrul al doilea al egalității demonstrate; aici d_1 ia valorile tuturor divizorilor numărului $\frac{n}{n_1}$.

123. Se vor examina cazurile în care: 1) n este puterea unui număr prim; 2) n este produsul puterilor unor numere prime diferite. Pentru cazul 1) se va utiliza rezultatul problemei 116, iar pentru 2), rezultatele problemelor 119 și 122.

124. Se vor examina cazurile în care: 1) n este un număr impar mai mare decît 1; 2) $n = 2^k$; 3) $n = 2n_1$, n_1 fiind un număr impar mai mare decît 1; 4) $n = 2^k n_1$, unde k este mai mare decît 1, iar n_1 este un număr impar mai mare decît 1.

125. Se va utiliza identitatea

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}{2}$$

și se vor examina cazurile în care: 1) n este nu număr impar; 2) $n = 2n_1$, n_1 fiind impar; 3) $n = 2^k n_1$ unde $k > 1$, iar n_1 este impar.

126. Se înmulțește suma S cu conjugata ei și se ține seamă de faptul că εx^2 nu se schimbă dacă se înlocuește x cu $x + n$.

CAPITOLUL II

CALCULUL DETERMINANȚILOR

132. Se va ține seamă că fiecare pereche de elemente ale permutării formează o inversiune.

133. Numărul inversiunilor din permutarea a doua este egal cu numărul succesiunilor normale din prima.

145. Se arată că în fiecare termen intră factorul 0.

149. Se înlocuiesc liniile prin coloane.

150. Se înlocuiesc liniile prin coloane.

153. Se va cerceta cum se modifică determinantul, cînd permutăm într-un mod oarecare coloanele sale.

154. a) Se observă că pentru $x = a_i$ determinantul are două linii egale.

155. La ultima coloană se adună prima coloană înmulțită cu 100 și a doua, înmulțită cu 10.

156. Se scade, în primul rînd, din fiecare coloană prima coloană.

163. Din coloana a doua se scade prima coloană.

179. Se adună prima linie la celelalte.

180. Se scade prima linie din toate celelalte.

181. Se scade prima linie din toate celelalte.

182. Se scade prima linie din toate celelalte.

183. Se scade a doua linie din toate celelalte.

184. Se adună prima linie la a doua.

185. Se adună toate coloanele la prima.

186. Din prima coloană se scade a doua și se adună a treia etc.

187. Din prima coloană se scade a doua și se adună a treia etc.

188. Se va dezvolta după elementele primei coloane, sau se va aduna, la ultima linie, prima linie înmulțită cu x^n, cea de a doua înmulțită cu x^{n-1} etc.

189. La ultima coloană se adună prima coloană înmulțită cu x^{n-1}, a doua înmulțită cu x^{n-2} etc.

190. Se va forma determinantul egal cu $f(x+1) - f(x)$. In determinantul obținut, din utlima coloană se scade prima, a doua înmulțită cu x, a treia înmulțită cu x^2 etc.

191. Se înmulțește ultima coloană cu a_1, a_2, ..., a_n și se scade respectiv din coloana I, a II-a, ..., a n-a.

192. Se adună toate coloanele al prima.

194. Se adună toate coloanele la ultima.

195. Din prima coloană se scoate factorul comun a_1; din a doua, a_2 etc. După aceea se adună la ultima coloană toate coloanele precedente.

196. Din prima coloană se scoate factorul comun h; se adună prima coloană la a doua.

197. Se înmulțesc cu x prima coloană și prima linie.

198. Din fiecare linie se scade prima linie, înmulțită, respectiv, cu a_1, a_2, ..., a_n. Din fiecare coloană se scade prima coloană, înmulțită, respectiv, cu a_1, a_2, ..., a_n.

199. Se adună toate coloanele la prima.

200. Se adună toate coloanele la prima.

201. Din fiecare coloană, începînd cu ultima, se scade coloana precedentă înmulțită cu a.

202. Din fiecare linie, începînd cu ultima, se scade linia precedentă. Apoi, la fiecare coloană se adună prima.

203. Se înmulțește prima linie cu b_0, cea de a doua cu b_1 etc. Se adună la prima linie toate liniile următoare.

204. Din prima linie se scoate factorul comun a, iar din a doua linie se scade prima.

205. Se va dezvolta după elementele primei linii.

206. Se va reprezenta sub forma de sumă a doi determinanți.

208. Se va considera că la fiecare element care nu se află pe diagonala principală este adunat un zero și se va reprezenta determinantul sub formă de sumă a 2^n determinanți. Se va folosi problema 206 sau 207.

211. Se va înmulți prima coloană cu x^{n-1}, cea de a doua cu x^{n-2} etc.

212. Se va dezvolta după elementele ultimei coloane și se va arăta că $\Delta_n = x_n \Delta_{n-1} + a_n x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ (Δ_n reprezintă determinantul de ordinul n). Pentru calculul determinantului se folosește inducția completă.

213. Se va dezvolta după elementele ultimei coloane și se va arăta că $\Delta_{n+1} = x_n \Delta_n + a_n y_1 y_2 \ldots y_n$.

214. Se dă ca factor comun a_1 din coloana a doua, a_2 din coloana a treia, ... a_n din coloana $n+1$. Se va schimba semnul primei coloane și se vor aduna toate coloanele la prima.

215. Se dezvoltă după elementele primei linii.

216. Se dezvoltă după elementele primei linii și se arată că $\Delta_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} - \Delta_{n-1}$.

219. Se va utiliza rezultatul problemei 217.

221. Se va dezvolta după elementele primei linii și se va arăta că $\Delta_n = x \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.

222. Din prima linie se va scădea penultima linie înmulțită cu $\frac{y_n}{y_{n-1}}$. Se arată apoi că $\Delta_n = \frac{y_n}{y_{n-1}} (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) \Delta_{n-1}$.

223. Se reprezintă sub formă de sumă a doi determinanți și se arată că $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$.

225. Se reprezintă sub formă de sumă a doi determinanți și se arată că $\Delta_n = (a_n - x) \Delta_{n-1} + x (a_1 - x) \ldots (a_{n-1} - x)$.

226. Se pune $x_n = (x_n - a_n) + a_n$, se reprezintă determinantul sub formă de sumă a doi determinanți și se arată că $\Delta_n = (x_n - a_n) \Delta_{n-1} + a_n (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \ldots (x_{n-1} - a_{n-1})$.

227. Se reprezintă sub formă de sumă a doi determinanți și se arată că

$\Delta_n = (x_n - a_n b_n) \Delta_{n-1} + a_n b_n (x_1 - a_1 b_1) \ldots (x_{n-1} - a_{n-1} b_{n-1})$.

228. Se reprezintă sub formă de sumă a doi determinanți și se arată că

$$\Delta_n = -m\,\Delta_{n-1} + (-1)^{n-1} m^{n-1} x_n.$$

230. Se va dezvolta după elementele primei linii și se va arăta că

$$\Delta_{2n} = (a^2 - b^2)\,\Delta_{2n-2}.$$

231. Din fiecare linie se scade linia precedentă și apoi se adună la linia a doua toate liniile următoare. După aceea, dezovltînd determinantul după elementele ultimei linii, se arată că

$$\Delta_n = [a + (n-1)\,b]\,\Delta_{n-1} + a\,(a+b)\,\ldots\,[a + (n-2)\,b].$$

232. Se reprezintă sub formă de sumă a doi determinanți și se arată că

$$\Delta_n = x\,(x - 2a_n)\,\Delta_{n-1} + a_n^2\,x^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x - 2a_i).$$

233. Punînd $(x - a_n)^2 = x\,(x - 2a_n) + a_n^2$ se reprezintă determinantul sub formă de sumă a doi determinanți și se arată că

$$\Delta_n = x\,(x - 2a_n)\,\Delta_{n-1} + a_n^2\,x^{n-1}\,(x - 2a_1)\,\ldots\,(x - 2a_{n-1}).$$

234. Se reprezintă sub formă de sumă a doi determinanți și se demonstrează că

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + (-1)^n\,b_1 b_2\,\ldots\,b_n.$$

235. Se va scrie ultimul element din ultima linie sub forma $a_n - a_n$. Se va demonstra apoi că

$$\Delta_n = (-1)^{n-1}\,b_1 b_2\,\ldots\,b_{n-1}\,a_n - a_n\,\Delta_{n-1}.$$

236. Din fiecare linie se scade linia următoare.

237. In locul primului element din coloana întîi, a_{11}, se pune $1 = x + (1 - x)$. Se reprezintă determinantul sub formă de sumă a doi determinanți. Se va utiliza apoi rezultatul problemei 236.

238. Se înmulțește linia a doua cu x^{n-1}, a treia cu x^{n-2}, ... linia n cu x. Se scoate factorul comun x^n din prima coloană, x^{n-1} din cea de a doua, ..., x din coloana n.

239. Se va folosi indicația dată pentru problema precedentă.

240. Din fiecare coloană, începînd cu ultima, se scade coloana precedentă. Apoi, din fiecare linie se scade linia precedentă. Se demonstrează că $\Delta_n = \Delta_{n-1}$. In calcule se va avea în vedere că $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

241. Din fiecare coloană se scade coloana precedentă.

242. Din fiecare linie se scade linia precedentă. Se demonstrează că $\Delta_n = \Delta_{n-1}$.

243. Din prima linie se scoate factorul comun m, din cea de a doua $m + 1, \ldots$, din ultima — factorul $m + n$. Din prima coloană se scoate factorul comun $\frac{1}{k}$, din cea de a doua $\frac{1}{k+1}$ etc. Se repetă această operație pînă ce toate elementele primei coloane vor deveni egale cu 1.

244. Din fiecare coloană se scade coloana percedentă. In determinantul obținut se scade din fiecare coloană cea precedentă, lăsînd primele două neschimbate. Apoi, din nou, din fiecare coloană se scade coloana precedentă, lăsînd neschimbate primele trei coloane etc. După m asemenea operații, se obține un determinant care are toate elementele ultimei coloane egale cu 1. Calculul acestui determinant nu mai prezintă dificultăți speciale.

245. Din fiecare linie se scade linia precedentă și se arată că $\Delta_{n+1} = (x - 1)\Delta_n$.

246. Din fiecare linie se scade linia precedentă și se arată că $\Delta_{n+1} = (n - 1)!\,(x - 1)\Delta_n$.

247. Din fiecare linie se scade linia precedentă; din fiecare coloană se scade coloana precedentă. Se demonstrează că $\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1}$.

248. Se scrie ultimul element din ultima linie sub forma $z + (x - z)$. Se descompune apoi determinantul în sumă de doi determinanți. Se va folosi faptul că determinantul este simetric în raport cu y și z.

249. V. indicația de la problema 248.

252. Se scade prima linie înmulțită cu $\frac{\beta}{\alpha}$ din toate celelalte linii. In determinantul obținut se scoate din prima coloană factorul comun $\frac{ab - \lambda\beta}{a(\alpha - \beta)}$, iar apoi din prima coloană se scad toate celelalte.

253. Se adună toate coloanele la prima coloană și din fiecare linie se scade linia precedentă. V. problema 199.

254. Se va folosi indicația de la problema precedentă.

256. Se va considera determinantul ca un polinom de gradul al patrulea în raport cu a și se va arăta că polinomul căutat este divizibil cu următoarele polinoame de gradul întîi în raport cu a:

$$a+b+c+d;\ a+b-c-d;\ a-b+c-d;\ a-b-c+d$$

258. Se adună la prima coloană, toate celelalte coloane și se scoate factorul comun $x+a_1+a_2+\ldots+a_n$. Punînd apoi $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$, se arată că determinantul este divizibil cu $x-a_1, x-a_2, \ldots, x-a_n$.

259. Determinant Vandermonde.

264. Se va dezvolta după elementele primei coloane.

265. Din linia a doua se scade prima. În determinantul obținut, din linia a treia se scade a doua etc.

269. Din linia a treia se scoate factorul comun $\frac{1}{2!}$, din cea de a patra — factorul $\frac{1}{3!}$ etc.

270. Se va utiliza rezultatul problemei 269.

271. Din coloana a doua se scoate factorul comun 2, din coloana a treia — factorul comun 3 etc. In timpul calculelor este bine să reprezentăm produsul $\prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (i_2 - k^2)$ sub forma

$$\prod (i^2 - k^2) = \prod (i-k) \cdot \prod (i+k).$$

272. Din prima coloană se scoate factorul comun, $\frac{x_1}{x_1-1}$; din coloana a doua $\frac{x_2}{x_2-1}$ etc.

273. Din prima linie se scoate factorul comun a_1^n, din linia a doua — factorul comun a_2^n etc.

275. La prima coloană se adună coloana a doua, înmulțită cu C_{2n}^1, a treia înmulțită cu C_{2n}^2 etc.

276. Se va utiliza rezultatul problemei 51.

277. Se va utiliza problema 53.

278. Se adaugă linia 1, x_1, x_2, ..., x_n și coloana 1, 0, 0, ..., 0, formîndu-se astfel un determinant de ordinul $n+1$, avînd aceiași valoare ca determinantul dat.

279. Se consideră determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & z \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & z^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & z^n \end{vmatrix}.$$

Se va compara dezvoltarea lui D după elementele ultimei coloane, cu expresia

$$D = \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k) \cdot \prod_{i=1}^{n} (z - x_i).$$

280. Se va folosi indicația de la problema precedentă.

282. Se adaugă la determinant sus linia 1, 0, ..., 0 și la stînga coloana 1, 1, 1, ..., 1; se scade apoi prima coloană din toate coloanele următoare.

285. Se va dezvolta după elementele ultimei linii.

286. Mai întîi, din fiecare coloană, începînd cu ultima, se scade cea precedentă, înmulțită cu x. Apoi, după scăderea ordinului și scoaterea factorilor comuni care apar, se transformă primele linii (care depind de x) folosind relația

$$(m+1)^s - m^s = sm^{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} m^{s-2} + \dots + 1.$$

287. Din fiecare coloană, începînd cu ultima, se scade coloana precedentă înmulțită cu x.

288. m) Se adună la prima coloană coloanele a 6-a și a 11-a, la coloana a doua — coloanele a 7-a și a 12-a, ..., la coloana a 5-a, — coloana a 10-a și a 15-a. La coloana a 6-a se adună coloana a 11-a, la coloana a 7-a — coloana a 12-a, ..., la coloana a 10-a — coloana a 15-a.

Din linia a 15-a se scade linia a 10-a, din linia a 14-a se scade linia a 9-a, ..., din linia a 6-a se scade prima linie.

293. Se va considera produsul

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0^n & b_1^n & \dots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

294. Se va consicera produsul

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \dots & \cos\alpha_n \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

295. Se va considera produsul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

296. Se va ridica la pătrat.

297. Din coloana a treia se scade prima, iar din coloana a patra se scade coloana a doua.

Apoi se înmulțește cu $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 0 & 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{vmatrix}$.

298. Din coloana a doua se scade prima coloană înmulțită cu n, iar din a patra, coloana a doua înmulțită cu n.

Se schimbă între ele locurile coloanelor a doua și a treia. Se înmulțește apoi cu

$$\begin{vmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi & 0 & 0 \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n+1)\varphi & -\sin(n+1)\varphi \\ 0 & 0 & \sin(n+1)\varphi & \cos(n+1)\varphi \end{vmatrix}$$

299. Se ridică la pătrat. Se va transforma apoi ca determinantul lui Vandermonde și fiecare diferență se va transforma în sinusul unui unghi. In felul acesta se va determina semnul.

300. Se va studia produsul

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

unde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

308. Se va lua în considerare că dacă $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$

Atunci

$$\Delta = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_1^j + \varepsilon_1^{-j}}{2}\,\varepsilon_1^{2k(j-1)}\right).$$

311. Se va folosi problema 92.

314. Se va ține seamă că $\prod_{k=0}^{2n-1}(a_0 + a_1\varepsilon_k + a_2\varepsilon_k^2 + \dots + a_{2n-1}\varepsilon_k^{2n-1}) = \prod_{r=0}^{n-1}[(a_0 + a_n) + (a_1 + a_{n+1})\alpha_r + \dots + (a_{n-1} + a_{2n-1})\alpha_r^{n-1}] \cdot \prod_{s=0}^{n-1}[(a_0 - a_n) + (a_1 - a_{n+1})\beta_s + \dots + (a_{n-1} - a_{2n-1})\beta_s^{n-1}]$,

unde $\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}$; $\alpha_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$;

$$\beta_s = \cos\frac{(2s+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2s+1)\pi}{n}.$$

323. Din fiecare linie se scade prima linie și din fiecare coloană se scade prima coloană.

325. Se va folosi problema 217.

327. Se reprezintă sub formă de sumă de determinanți sau se pune $x=0$ în determinant și în derivatele sale.

328. 1) Din liniile $2n-1, 2n-2, \ldots, n+1$ se scade linia precedentă, iar din linia n se scade suma tuturor liniilor precedente.

2) La linia $n+i$ se adună linia i; $i=1, 2, \ldots, n-1$.

329. La fiecare linie se adună toate liniile următoare, iar din fiecare coloană se scade coloana precedentă. Se demonstrează apoi că

$$\Delta_{n+1}(x)=(x-n)\ \Delta_n(x-1).$$

CAPITOLUL IV

MATRICE

466. Se va folosi rezultatul problemei 465 e.

473. Se va considera suma elementelor de pe diagonală.

491. Se vor folosi rezultatele problemelor 489, 490.

492. Se va folosi rezultatul problemei 490.

494. Se vor folosi rezultatele problemelor 492, 493.

495. Se vor folosi rezultatele problemelor 492, 493.

496. Se va demonstra prin inducție, după numărul coloanelor matricei B, demonstrînd în prealabil că dacă adăugarea unei coloane nu schimbă rangul matricei B, atunci ea nu schimbă nici rangul matricei (A,B).

Demonstrarea se poate face și fără inducție, folosind teorema lui Laplace.

497. Se vor folosi rezultatele problemelor 496, 492.

498. Se va alege din matricea $(E-A,\ E+A)$ o matrice pătrată nesingulară P și se vor considera produsele $(E-A)P$ și $(E+A)P$.

500. Se va aplica rezultatul problemei 489.

501. Se va demonstra unicitatea reprezentării din problema 500 și se va reduce problema prin aceasta la evaluarea numărului matricelor triunghiulare R cu un determinant k dat. Notînd numărul căutat cu $F_n(k)$, se va demonstra că dacă $k=ab$, a,b fiind prime între ele, atunci $F_n(k)=F_n(a)\times \times F_n(b)$. In sfîrșit, se demonstrează prin inducție formula pentru $F_n(p^m)$, unde p este un număr prim.

505. Se vor folosi rezultatele problemelor 495 și 498. Se caută matricea P cu determinantul cel mai mic posibil, astfel încît $P^{-1}AP$ să fie de tip diagonal, iar apoi se folosesc rezultatele problemei 500.

517. Se va aplica teorema lui Laplace și inegalitatea lui Buniakovskii.

518. Se va stabili egalitatea $|\overline{A}A| = |\overline{B}B| \cdot |\overline{C}C|$ în ipoteza că suma produselor elementelor oricărei coloane a matricei B cu elementele corespunzătoare ale oricărei coloane a matricei C este nulă. Apoi se va completa într-un mod convenabil matricea (B,C) pînă la o matrice pătrată și se va folosi rezultatul problemei 517.

523. Se va adăuga la determinant o coloană la stînga, avînd toate elementele egale cu $\frac{M}{2}$, și o linie deasupra avînd toate elementele nule (înafară de elementele din colț); apoi se va scădea prima coloană din toate celelalte.

527. Se vor folosi rezultatele problemelor 522, 526.

528. Se va stabili legătură matricei reciproce cu cea inversă.

529. Pentru minorul de ordinul m format din elementele primelor m linii și ale primelor m coloane ale matricei reciproce, rezultatul se va stabili considerînd produsul matricelor

$$\begin{pmatrix} A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{n1} \\ A_{12}, A_{22}, \ldots, A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{1m}, A_{2m}, \ldots, A_{nm} \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \\ \\ a^{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

unde A_{ik} este complementul algebric al elementului a_{ik}.

In mod analog, se procedează și în cazul general.

535. Se va reprezenta $A \times B$ sub forma $(A \times E_m) \times (E_n \times B)$.

537. Demonstrarea se face prin inducție, examinînd întîi cazul cînd A_{11} este o matrice nesingulară. Cazul general se reduce la acesta, adunînd la matrice, matricea λE.

CAPITOLUL V

POLINOAME ȘI FUNCȚII RAȚIONALE DE O SINGURĂ VARIABILĂ

547. a) Se va dezvolta $f(x)$ după puterile lui $x-3$, înlocuindu-se apoi x prin $x+3$.

553. Se derivează direct și se pune $x=1$; apoi se scoate în evidență termenul de gradul cel mai mare în x și se continuă derivarea.

555. Se consideră polinoamele

$$f_1(x)=nf(x)-xf'(x); \quad f_2(x)=nf_1(x)-xf_1'(x)$$

etc.

561. Demonstrarea se face prin inducție completă.

562. O rădăcină multiplă de ordinul $k-1$, diferită de zero, a polinomului $f(x)$ este o rădăcină multiplă de ordinul $k-2$ a polinomului $xf'(x)$, de ordinul $k-3$ a polinomului $x[xf'(x)]'$ etc.

Reciproc, o rădăcină comună, diferită de zero, a polinoamelor $f(x)$, $xf'(x)$, $x[xf'(x)]'$, ... (în total $k-1$ polinoame) este o rădăcină multiplă a lui $f(x)$, de ordin cel puțin $k-1$.

563. Se va deriva relația care arată că polinomul este divizibil cu derivata sa.

567. Se va considera funcția $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ sau $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

568. Se va pune problema în legătură cu examinarea rădăcinilor polinomului

$$\varphi(x)=f(x)f'(x_0)-f'(x)f(x_0),$$

unde x_0 este o rădăcină a lui $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$.

569. Se va folosi soluția problemei precedente și se va dezvolta $f(x)$ după puterile lui $x-x_0$.

576. Se va demonstra ca și lema lui d'Alembert.

580, 581. Se va pune funcția sub aceeași formă ca și la demonstrarea lemei lui d'Alembert

$$f(x)=f(a)+\frac{f^k(a)}{k!}(z-a)^k[1+\varphi(z)]; \quad \varphi(a)=0.$$

583. Se caută rădăcinile polinomului și se ține seamă de coeficienții termenilor de gradul cel mai mare [în problemele a)

și b)]. In problema c), pentru găsirea rădăcinilor este bine să punem $x=\operatorname{tg}^2\theta$.

589. Se caută rădăcinile comune.

608. Se demonstrează, în prealabil, că $f(x)$ nu are rădăcini reale de multiplicitate impară.

623. Se va utiliza rezultatul problemei 622.

626. Se va folosi faptul că ecuația trebuie să rămînă neschimbată, cînd înlocuim pe x prin $-x$, sau prin $\frac{1}{x}$.

627. Ecuația trebuie să rămînă neschimbată, dacă înlocuim pe x prin $\frac{1}{x}$, sau prin $1-x$.

637. Se împarte cu $(1-x)^n$ și se derivează de $m-1$ ori, punînd după fiecare derivare $x=0$, Se ține seamă că gradul lui $N(x)$ este mai mic decît m, iar gradul lui $M(x)$ este mai mic decît n.

642. Se va utiliza formula lui Lagrange. Se va efectua împărțirea în fiecare termen al rezultatului și se vor reduce termenii asemenea, folosind rezultatul problemei 100.

644. Se exprimă $f(x_0)$ prin $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, utilizînd formula de interpolare a lui Lagrange și se compară rezultatul cu enunțul problemei, ținînd seama de faptul că $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ sînt independente. Apoi se studiază funcția $\varphi(x)=(x-x_1)\ (x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)$, dezvoltînd-o după puterile lui $x-x_0$.

645. Se reprezintă polinomul x^s în funcția de valorile sale, cu ajutorul formulei de interpolare a lui Lagrange.

648, 649. Se formează polinomul de interpolare după metoda lui Newton.

650. Se caută valorile polinomului cerut pentru $x=0, 1, 2, \ldots, 2_n$.

651. Problema poate fi rezolvată utilizînd metoda lui Newton. Mai simplu este, însă să considerăm polinomul $F(x)=xf(x)-1$, unde $f(x)$ este polinomul căutat.

652. Se consideră polinomul $(x-a)f(x)-1$.

653. Se va scrie polinomul după metoda de interpolare a lui Newton, introducînd pentru comoditatea calculelor factorialul la numitorul fiecărui termen.

654. Se consideră polinomul $f(x^2)$, unde $f(x)$ este polinomul căutat.

655. Cel mai simplu, după formula lui Lagrange:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)},$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile numitorului.

656. Se descompune întîi după formula lui Lagrange, apoi se strîng la un loc termenii complex conjugați.

657. e) Se folosește problema 631.

f) Se pune $\frac{a+x}{2a}=y$.

d, h) Se caută descompunerea prin metoda coeficienților nedeterminați. O parte se determină prin substituțiile $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$ după înmulțire cu numitorul comun. Apoi se derivează și se pune din nou $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$.

660. Se va folosi problema 659. In exemplul b) se va descompune $\frac{1}{x^2-3x+2}$ în fracții simple.

665, 666. Se va folosi problema 663.

667. In exemplul c) se dezvoltă polinomul după puterile lui $x-1$.

668. Se dezvoltă după puterile lui $x-1$ (sau se pune $x=y+1$).

669. Se pune $x=y+1$ și se demonstrează prin inducție completă că toți coeficienții deîmpărțitului și împărțitorului (în afară de cei ai termenilor de gradul cel mai înalt) sînt divizibili cu p.

670, 671. Se demonstrează ca teorema lui Eisenstein.

679, 680. Admițînd reductibilitatea lui $f(x)$, se pune $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$ și se trag concluzii asupra valorilor divizorilor.

681. Se evaluează numărul de valori egale ale divizorilor presupuși.

682. Se ține seamă că $f(x)$ nu are rădăcini reale.

683. Se demonstrează că pentru valori întregi ale variabilei, valorile unui polinom cu mai mult de trei rădăcini întregi nu pot fi numere prime și se va aplica acest fapt la polinomul $f(x)-1$.

684, 685. Se va aplica rezultatul problemei 683.

702. Se va forma șirul lui Șturm și se vor examina separat cazurile cînd n este par sau impar.

707 — 712. Se deduc relațiile de recurență între polinoamele de grade vecine și derivatele lor și se construiește cu

ajutorul lor şirul lui Sturm. In problema 708 se va forma şirul lui Sturm numai pentru valori pozitive ale lui x; inexistenţa rădăcinilor negative rezultă din alte considerente. In problema 709 se va forma şirul lui Sturm pentru x negativ.

713. Se foloseşte faptul că $F'(x)=2f(x)f'''(x)$ şi că $f'''(x)$ este o constantă.

717. Se va descompune $G(x)$ în factori şi se va aplica de cîteva ori rezultatul problemei 716.

718. Se va aplica rezultatul problemei 717 la polinomul x^m.

719. Se ţine seamă că dacă toate rădăcinile polinomului $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ sînt reale, atunci toate rădăcinile polinomului $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ sînt, de asemenea, reale.

721. Se înmulţeşte cu $x-1$.

727. Se demonstrează prin reducere la absurd, folosind teorema lui Rolle şi rezultatul problemei 581.

728. Se va construi graficul funcţiei $\psi(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ şi se va demonstra riguros că orice rădăcină a lui $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ dă un extrem pentru $\psi(x)$ şi reciproc. Se va demonstra că $\psi(x)$ nu are extreme în intervalele dintre rădăcinile lui $f'(x)$ care conţine o rădăcină a lui $f(x)$ şi are exact un singur extrem în intervalele care nu conţin rădăcini ale lui $f(x)$.

729. Se vor utiliza rezultatele problemelor 726 şi 727.

730. Se va studia comportarea funcţiei

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}+\frac{x+\lambda}{\gamma}.$$

731. Se rezolvă pe baza problemei precedente pentru $\lambda=0$.

732. Se demonstrează prin inducţie în raport cu gradul lui $f(x)$, punînd $f(x)=(x+\lambda)f_1(x)$, unde $f_1(x)$ este un polinom de gradul $n-1$.

733. Se demonstrează aplicînd de două ori rezultatul problemei 732.

734. Dacă toate rădăcinile lui $f(x)$ sînt pozitive, atunci demonstrarea se face prin mijloace elementare şi anume prin inducţie după gradul lui $f(x)$. In ipotezele inducţiei, trebuie să introducem şi faptul că rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ale polinomului $b_0+b_1wx+\ldots+b_{n-1}w^{(n-1)^2}x^{n-1}$ satisfac condiţiile

$$0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1} \text{ şi } x_i>x_{i-1}w^{-2}.$$

Pentru a demonstra teorema în cazul general, trebuie să considerăm pe w^{x^2} ca limita unui polinom în x, cu rădăcinile conținute în intervalul $(0, n)$ și să ne folosim de rezultatul problemei 731.

735. Se consideră $\left|\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}\right|$, unde

$$\varphi(x) = a_0 \cos\varphi + \ldots + a_n \cos(\varphi + n\theta)\, x^n,$$
$$\psi(x) = b_0 \sin\varphi + \ldots + b_n \sin(\varphi + n\theta)\, x^n.$$

736. Se va considera modulul lui $\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}$, unde

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$
$$\psi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

După ce s-a demonstrat că rădăcinile sînt reale, se va înmulți $\varphi(x) + i\psi(x)$ cu $\alpha - \beta i$ și se va considera partea reală a produsului. Se va ține seamă de rezultatul problemei 727.

737. Se va descompune $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ în elemente simple, se vor studia semnele coeficienților din această descompunere și se va considera partea imaginară

$$\frac{-i\,|\varphi(x)+i\psi(x)|}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i.$$

738. Se va studia partea imaginară a expresiei $\frac{f'(x)}{f(x)}$ descompunînd-o în elemente simple.

739. Se va face o schimbare de variabilă, astfel încît semiplanul respectiv să se transforme în semiplanul $\Im(x) > 0$.

740. Se va face legătură cu problema 739.

741. Se descompune $\frac{f'(x)}{f(x)}$ în elemente simple și se evaluează partea imaginară.

743. Se pune $z = yi$ și se folosesc rezultatele problemelor 736 și 737.

744, 745. Se va utiliza rezultatul problemei 743.

746. Se pune $x = \frac{1+y}{1-y}$ și se folosește rezultatul problemei 744.

747. Se înmulțește polinomul cu $1 - x$ și se evaluează modulul lui $(1 - x)f(x)$, punînd $|x| = \rho > 1$.

CAPITOLUL VI

FUNCȚII SIMETRICE

772. Laturile unui triunghi asemenea cu un triunghi dat și înscris într-un cerc de rază 1/2 sînt egale cu sinușii unghiurilor triunghiului dat.

800. Se calculează întîi suma

$$\sum_{i=1}^{n} (x + x_i)^k;$$

se ia apoi $x = x_j$ și se însumează în raport cu j de la 1 la n. In sfîrșit, se înlătură termenii inutili și se împarte cu 2.

801. Se rezolvă ca problema 800.

805. Orice rădăcină primitivă de ordinul n a unității, ridicată la puterea m, dă o rădăcină primitivă de ordinul $\frac{n}{d}$ unde d este cel mai mare divizor comun al lui m și n. După efectuarea acestei operații asupra tuturor rădăcinilor primitive de ordinul n ale unității, toate rădăcinile primitive de ordinul $\frac{n}{d}$ se obțin de același număr de ori.

806. Se vor folosi rezultatele problemelor 805, 117, 119.

807. Trebuie găsită o ecuație care admite ca rădăcini pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pentru aceasta se vor folosi formulele lui Newton sau reprezentarea coeficienților prin sumele de puteri ale rădăcinilor sub formă de determinant (v. problema 803).

808. Problema se rezolvă ușor cu ajutorul formulelor lui Newton sau cu ajutorul reprezentării sumelor de puteri ale rădăcinilor prin funcțiile simetrice fundamentale, sub formă de determinanți (v. problema 802), dar și mai simplu este să se înmulțească ecuația cu $(x - a)(x - b)$ și să se evalueze sumele de puteri pentru noua ecuație.

809. Cel mai simplu este să se înmulțească ecuația cu $(x - a)(x - b)$.

818. Se vor considera rădăcinile polinomului $f(x)$ ca variabile independente. Se va înmulți determinantul format din coeficienții resturilor cu determinantul lui Vandermonde.

819. Se demonstrează întîi că toate polinoamele ψ_k sînt de gradul $n - 1$. Apoi se înmulțește determinantul format din coeficienții lui ψ_k cu determinantul lui Vandermonde.

820. Se rezolvă ca problema 819.

827. Se va folosi faptul că puterile m ale rădăcinilor primitive de ordinul n ale unității iau valorile tuturor rădăcinilor primitive de ordinul $\frac{n}{d}$ ale unității, d fiind cel mai mare divizor comun al lui m și n.

828. Se va utiliza rezultatul problemei 827 și faptul că $R(X_m, X_n)$ este un divizor al lui $R(X_m, x^n-1)$ și $R(X_n, x^m-1)$.

834, 835. Se va calcula $R(f', f)$.

839. Se înmulțește cu $x-1$.

840. Se înmulțește cu $x-1$ și se utilizează apoi rezultatul problemei 835.

843. Se va calcula $R(X_n, X_n')$. La calculul valorilor pe care le ia X_n' pentru rădăcinile lui X_n, se va reprezenta X_n sub forma:

$$(x^n-1)\ \Pi\ (x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)},$$

considerînd că d ia toate valorile divizorilor proprii ai lui n.

844. Se va folosi relația $E_n' = E_n - x^n$.

845. Se va folosi relația

$$nx - x - a)\,F_n - x(x+1)\,F_n' + \frac{(a-1)\ldots(a-n)}{n!} = 0.$$

846. Se vor folosi relațiile

$$P_n = xP_{n-1} - (n-1)\,P_{n-2};\quad P_n' = nP_{n-1}.$$

847. Se vor folosi relațiile

$$xP_n' = nP_n + n^2P_{n-1};\ P_n = (x-2n+1)\,P_{n-1} - (n-1)^2\,P_{n-2}.$$

848. Se vor folosi relațiile

$$(4-x^2)\,P_n' + nxP_n = 2nP_{n-1};\qquad P_n - xP_{n-1} + P_{n-2} = 0.$$

849. Se vor folosi relațiile

$$P_n - 2xP_{n-1} + (x^2+1)\,P_{n-2} = 0;\quad P_n' = (n+1)\,P_{n-1}.$$

850. Se vor folosi relațiile:

$$P_n - (2n-1)\,xP_{n-1} + (n-1)^2(x^2+1)\,P_{n-2} = 0;\quad P_n' = n^2P_{n-1}.$$

851. Se vor folosi relațiile

$$P_n - (2nx+1)\,P_{n-1} + n(n-1)\,x^2P_{n-2} = 0;\ P_n' = (n+1)\,nP_{n-1}.$$

852. Se va rezolva problema prin metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Rezultatul obţinut prin anularea derivatelor se va scrie sub forma unei ecuaţii diferenţiale în raport cu polinomul care realizează maximul şi se va rezolva ecuaţia prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

867. Se va arăta, în primul rînd, că pentru un n dat există numai un număr finit de ecuaţii cu proprietăţile indicate. Apoi, se va arăta că proprietăţile se păstrează prin transformarea $y = x^m$.

CAPITOLUL VII

ALGEBRĂ LINIARĂ

884. Se vor folosi rezultatele problemelor 51, 52.

916. Unghiul minim trebuie căutat printre unghiurile formate de vectorii celui de al doilea plan cu proiecţiile lor ortogonale pe primul plan.

917. Se va considera cubul într-un sistem de coordonate cu originea în centrul lui şi cu axele paralele cu muchiile. Apoi, se vor lua ca axe patru diagonale, ortogonale două cîte două.

918. Se va folosi rezultatul problemei 907.

920. Se demonstrează prin inducţie.

921. Se va folosi faptul că $V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] = V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k]$ dacă $A_i \perp B_j$ cum şi rezultatul problemei precedente.

933. Se va căuta întîi valorile caracteristice pentru pătratul matricei. Apoi, pentru determinarea semnelor la extragerea rădăcinii pătrate se va ţine seamă că suma valorilor caracteristice este egală cu suma elementelor de pe diagonala principală şi că produsul valorilor caracteristice este egal cu determinantul. Se vor aplica rezultatele problemelor 126 şi 299.

934. Se aplică rezultatul problemei 933.

936. Se vor utiliza rezultatele problemelor 537 şi 930.

943. 1. Se ţine seamă că determinantul unei transformări triunghiulare este egal cu unitatea.

2. Se pune $x_{k\pm1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$.

945. Forma liniară al cărei pătrat se adaugă la forma pătratică, se va considera ca o nouă variabilă.

946. Se va pune în evidență în forma f un pătrat și se va folosi rezultatul probemei 945.

948. Se va considera forma pătratică de variabilele u_1, u_2, ..., u_n

$$f = \sum_{k=1}^{n} (u_1 + u_2 x_k + \ldots + u_n x_k^{n-1})^2,$$

unde x_1, x_2, ..., x_n sînt rădăcinile ecuației date.

950. Se descompune f și φ într-o sumă de pătrate și se folosește distributivitatea operației (f, φ).

965. La demonstrarea teoremei reciproce se va folosi descompunerea $X = AX + (E - A)X$.

966. Se va scrie matricea transformării în baza obținută prin reunirea bazelor ortonormate ale lui P și Q.

967. Se va arăta că $(AX, X) = 0$ pentru orice vector real X. Se descompune valoarea caracteristică și vectorul propriu, într-o parte reală și într-una imaginară.

968. Se înmulțește matricea A la dreapta cu P și la stînga cu P^{-1}, unde P este o matrice ortogonală care are primele două coloane formate din părțile reale și imaginare normate ale vectorului propriu.

970, 971. Se va folosi faptul că pentru o matrice A ortogonală $AX \cdot AY = X \cdot Y$, oricare ar fi vectorii reali X și Y.

972. Se demonstrează pe baza rezultatelor problemelor 970, 971 și, la fel ca problema 968, pe baza rezultatului problemei 967.

975. Se va trece la forma canonică Jordan.

976. Se va trece la forma canonică Jordan.

978. Se va face legătura cu soluția problemei precedente.

980. In ce privește necesitatea, v. problema 473.

Pentru a demonstra că este suficient, să considerăm la început cazul cînd toate elementele de pe diagoanla principală a matricei C sînt egale cu zero. Mai departe, se va folosi faptul că dacă $C = XY - YX$, atunci

$$S^{-1} CS = (S^{-1} XS)(S^{-1} YS) - (S^{-1} YS)(S^{-1} XS).$$

PARTEA A TREIA

RĂSPUNSURI ŞI SOLUŢII

CAPITOLUL I

NUMERE COMPLEXE

1. $x = -\frac{4}{11}$; $y = \frac{5}{11}$.

2. $x = -2$; $y = \frac{3}{2}$; $z = 2$; $t = -\frac{1}{2}$.

3. 1, dacă $n = 4k$; i, dacă $n = 4k + 1$; -1, dacă $n = 4k + 2$; $-i$, dacă $n = 4k + 3$, k este un număr întreg.

5. a) $117 + 44\,i$; b) -556; c) $-76\,i$.

6. Atunci şi numai atunci cînd

1) niciunul dintre factori nu este egal cu zero şi

2) factorii sînt de forma $(a + bi)$ şi $\lambda(b + ai)$, unde λ este un număr real.

7. a) $\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$; b) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + i\,\frac{2ab}{a^2 + b^2}$; c) $\frac{44 - 5i}{318}$;

d) $\frac{-1 - 32i}{25}$; e) 2.

8. $2i^{n-1}$.

9. a) $x = 1 + i$; $y = i$; b) $x = 2 + i$; $y = 2 - i$;

c) $x = 3 - 11\,i$; $y = -3 - 9i$; $z = 1 - 7i$.

10. a) $-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) 1.

11. a) $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac)$; b) $a^3 + b^3$;

c) $2(a^3 + b^3 + c^3) - 3\,(a^2b) + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 12\,abc$;

d) $a^2 - ab + b^2$.

12. a) $0,\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; b) $0,\ 1,\ i,\ -1,\ -i$.

15. a) $\pm(1+i)$; b) $\pm(2-2i)$; c) $\pm(2-i)$; d) $\pm(1+4i)$; e) $\pm(1-2i)$; f) $\pm(5+6i)$; g) $\pm(1+3i)$; h) $\pm(1-3i)$; i) $\pm(3-i)$; j) $\pm(3+i)$; k) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$; l) $\pm\sqrt{8+2\sqrt{17}}$; $\pm i\sqrt{-8+2\sqrt{17}}$; m) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; n) $\frac{\sqrt{2}(\pm 1\pm i)}{2}$; o) $i^{\alpha}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)$; $\alpha=0, 1, 2, 3$.

16. $\pm(\beta-\alpha i)$.

17. a) $x_1=3-i$; $x_2=-1+2i$; b) $x_1=2+i$; $x_2=1-3i$; c) $x_1=1-i$; $x_2=\frac{4-2i}{5}$.

18. a) $1\pm 2i$; $-4\pm 2i$; $(x^2-2x+5)(x^2+8x+20)$;
b) $2\pm i\sqrt{2}$; $-2\pm 2i\sqrt{2}$; $(x^2-4x+6)(x^2+4x+12)$.

19. a) $x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{i}{2}$; b) $\pm 4\pm i$.

20. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}-\frac{p}{4}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}+\frac{p}{4}}$.

22. a) $\cos 0+i\sin 0$; b) $\cos\pi+i\sin\pi$; c) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$;
d) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; e) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;
f) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; g) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;
h) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; i) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;
j) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; k) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;
l) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; m) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;
n) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$; o) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$;
p) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Observație. In toate aceste cazuri s-a indicat numai una dintre valorile posibile ale argumentului.

23. a) $\sqrt{10}\,(\cos 18°26' + i \sin 18°26')$;

b) $\sqrt{17}\,(\cos 345°57'48'' + i \sin 345°57'48'')$;

c) $\sqrt{5}\,(\cos 153°26'6'' + i \sin 153°26'6'')$;

d) $\sqrt{5}\,(\cos 243°26'6'' + i \sin 243°26'6'')$.

24. a) Un cerc de rază 1, cu centrul în origine.

b) O semidreaptă care pleacă din origine, făcînd un unghi de $\frac{\pi}{6}$ cu semiaxa reală pozitivă.

25. a) Interiorul unui cerc de rază 2, cu centrul în origine.

b) Interiorul şi periferia unui cerc de rază 1, cu centrul în punctul (0, 1).

c) Interiorul unui cerc de rază 1, cu centrul în punctul (1, 1).

26 a) $x = \frac{3}{2} - 2i$; b) $x = \frac{3}{4} + i$.

27. Identitatea exprimă o teoremă cunoscută din geometrie: suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor sale.

29. Dacă diferenţa argumentelor acestor numere este egală cu $\pi + 2k\pi$, unde k este un număr întreg.

30. Dacă diferenţa argumentelor acestor numere este egală cu $2k\pi$, unde k este un număr întreg.

34. $\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)$.

35. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right)\right]$.

36. a) $2^{12}(1 + i)$; b) $2^9(1 - i\sqrt{3})$; c) $(2 - \sqrt{3})^{12}$; d) -64.

38. $\cos\frac{n\pi}{3} + i \sin\frac{n\pi}{3}$.

39. $2\cos\frac{2n\pi}{3}$.

40. Soluţie. $1 + \cos\alpha + i \sin\alpha =$

$$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i \sin\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$(1 + \cos\alpha + i \sin\alpha)^n = 2^n \cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i \sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

43. a) $-i;\ \frac{\sqrt{3}+i}{2};\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2};$

b) $-1+i;\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i;\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i;$

c) $1+i;\ 1-i;\ -1+i;\ -1-i;$

d) $1;\ -1;\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

e) $i\sqrt{3};\ -i\sqrt{3};\ \frac{3+i\sqrt{3}}{2};\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2};\ -\frac{3+i\sqrt{3}}{2};\ \frac{-3+i\sqrt{3}}{2};$

44. a) $\sqrt[6]{5}\,(\cos 8°5'18'' + i\sin 8°5'18'')\,\varepsilon_k,$
unde $\varepsilon_k = \cos 120°\,k + i\sin 120°\,k,\ k = 0, 1, 2;$

b) $\sqrt[6]{10}\,(\cos 113°51'20'' + i\sin 113°51'20'')\,\varepsilon_k,$
unde $\varepsilon_k = \cos 120°\,k + i\sin 120°\,k,\ k = 0, 1, 2;$

c) $\sqrt[10]{13}\,(\cos 11°15'29'' + i\sin 11°15'29'')\,\varepsilon_k,$
unde $\varepsilon_k = \cos 72°\,k + i\sin 72°\,k,\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$

45. a) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi + i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right),$
unde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$

b) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi + i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right),$
unde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;$

c) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi + i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right),$
unde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

46. $\beta\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$ unde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

47. a) *Soluție.* Să considerăm $(\cos x + i\sin x)^5$.
După formula lui Moivre $(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x.$
Pe de altă parte

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - $$
$$-10\,i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x =$$
$$= (\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x) + i(5\cos^4 x\sin x -$$
$$- 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x).$$

Comparînd rezultatele, obținem :

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x;$$

b) $\cos^8 x - 28\cos^6 x \sin^2 x + 70\cos^4 x \sin^4 x - 28\cos^2 x \sin^6 x + \sin^8 x$;

c) $6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x$;

d) $7\cos^6 x \sin x - 35\cos^4 x \sin^3 x + 21\cos^2 x \sin^5 x - \sin^7 x$.

48. $\dfrac{2(3\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + 3\operatorname{tg}^5\varphi)}{1 - 15\operatorname{tg}^2\varphi + 15\operatorname{tg}^4\varphi - \operatorname{tg}^6\varphi}$.

49. $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \ldots + M$, unde $M = (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n x$, dacă n este par și $M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos x \sin^{n-1} x$, dacă n este impar.

$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \ldots + M$, unde $M = (-1)^{\frac{n-2}{2}} n\cos x \sin^{n-1} x$, dacă n este par și $M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n x$, dacă n este impar.

50. a) Soluție. Fie $\alpha = \cos x + i \sin x$. Atunci

$$\alpha^{-1} = \cos x - i \sin x;$$

$$\alpha^k = \cos kx + i \sin kx; \quad \alpha^{-k} = \cos kx - i \sin kx.$$

De aici rezultă $\cos kx = \dfrac{\alpha^k + \alpha^{-k}}{2}$; $\sin kx = \dfrac{\alpha^k - \alpha^{-k}}{2i}$.

In particular, avem : $\cos x = \dfrac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}$; $\sin x = \dfrac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}$;

$$\sin^3 x = \left(\frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}\right)^3 = \frac{\alpha^3 - 3\alpha + 3\alpha^{-1} - \alpha^{-3}}{-8i} = \frac{(\alpha^3 - \alpha^{-3}) - 3(\alpha - \alpha^{-1})}{-8i};$$

$$\sin^3 x = \frac{2i\sin 3x - 6i\sin x}{-8i} = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4};$$

b) $\dfrac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$; c) $\dfrac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$;

d) $\dfrac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}$.

52. Soluție :

$$C_{m-p}^{p} + C_{m-p-1}^{p-1} = \frac{(m-p)(m-p-1)\ldots(m-2p+1)}{p!} +$$

$$+ \frac{(m-p-1)\ldots(m-2p+1)}{(p-1)!} = \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{p!}.$$

Să notăm $2\cos mx = S_m$; $2\cos x = a$. Egalitatea care ne interesează poate fi scrisă sub forma

$$S_m = a^m - ma^{m-2} + (C_{m-2}^{2} + C_{m-3}^{1})\, a^{m-4} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^p (C_{m-p}^{p} + C_{m-p-1}^{p-1})\, a^{m-2p} + \ldots$$

Pe de altă parte avem :

$$2\cos mx = 2\cos x \cdot 2\cos(m-1)x - 2\cos(m-2)x,$$

sau, în notațiile noastre,

$$S_m = aS_{m-1} - S_{m-2}.$$

Se verifică ușor că pentru $m = 1$ și $m = 2$ egalitatea de demonstrat este adevărată.

Să admitem că :

$$S_{m-1} = a^{m-1} - (m-1)\, a^{m-3} + (C_{m-3}^{2} + C_{m-4}^{1})\, a^{m-5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^p (C_{m-p-1}^{p} + C_{m-p-2}^{p-1})\, a^{m-2p-1} + \ldots;$$
$$S_{m-2} = a^{m-2} - (m-2)\, a^{m-4} + (C_{m-4}^{2} + C_{m-5}^{1})\, a^{m-6} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{p-1} (C_{m-p-1}^{p-1} + C_{m-p-2}^{p-2})\, a^{m-2p} + \ldots$$

Atunci $S_m = a^m - ma^{m-2} + \ldots$

$$\ldots + (-1)^p (C_{m-p-1}^{p} + C_{m-p-2}^{p-1} + C_{m-p-1}^{p-1} + C_{m-p-2}^{p-2})\, a^{m-2p} + \ldots$$

Având în vedere că $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, obținem rezultatul cerut.

53. $\dfrac{\sin mx}{\sin x} = (2\cos x)^{m-1} - C_{m-2}^{1}(2\cos x)^{m-3} +$

$$+ C_{m-3}^{2}(2\cos x)^{m-5} - \ldots + (-1)^p C_{m-p-1}^{p}(2\cos x)^{m-2p-1} + \ldots$$

54. a) $2^{\frac{n}{2}} \cos\dfrac{n\pi}{4}$; b) $2^{\frac{n}{2}} \sin\dfrac{n\pi}{4}$. **56.** $\dfrac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}} \sin\dfrac{n\pi}{6}$.

59. a) Soluție :

$$S = 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^k\cos k\varphi.$$

Să formăm expresia

$$T = a\sin\varphi + a^2\sin 2\varphi + \ldots + a^k\sin k\varphi;$$

$$S + Ti = 1 + a(\cos\varphi + i\sin\varphi) + a^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + a^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Punînd $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, avem

$$S + Ti = 1 + a\alpha + a^2\alpha^2 + \ldots + a^k\alpha^k = \frac{a^{k+1}\alpha^{k+1} - 1}{a\alpha - 1}.$$

S este egal cu partea reală a sumei obținute. Avem

$$S + Ti = \frac{a^{k+1}\alpha^{k+1} - 1}{a\alpha - 1} \cdot \frac{a\alpha^{-1} - 1}{a\alpha^{-1} - 1} = \frac{a^{k+2}\alpha^k - a^{k+1}\alpha^{k+1} - a\alpha^{-1} + 1}{a^2 - a(\alpha + \alpha^{-1}) + 1}$$

de unde $S = \dfrac{a^{k+2}\cos k\varphi - a^{k+1}\cos(k+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}$;

b) $\dfrac{a^{k+2}\sin(\varphi + kh) - a^{k+1}\sin[\varphi + (k+1)h] - a\sin(\varphi - h) + \sin\varphi}{a^2 - 2a\cos h + 1}$;

c) $\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$.

60. Soluție :

$$T = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx;$$
$$S = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx.$$

Fie $\alpha = \cos\dfrac{x}{2} + i\sin\dfrac{x}{2}$. Atunci $S + Ti = \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n}$,

$$S + Ti = \alpha^2\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = \alpha^2\frac{\alpha^n(\alpha^n - \alpha^{-n})}{\alpha(\alpha - \alpha^{-1})} =$$

$$= \left(\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

De aici obținem $T = \sin\frac{n+1}{2}x\,\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

61. $\frac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x}$.

64. a) $\frac{\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, dacă n este par,

$\frac{\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, dacă n este impar;

b) $-\frac{\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, dacă n este par,

$\frac{\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, dacă n este impar.

66. a) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x$; b) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{n+2}{2}x$.

67. a) $2^n\sin^n\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi-(n+2)x}{2}$; b) $2^n\sin^n\frac{x}{2}\sin\frac{(n+2)x-n\pi}{2}$

68. Limita sumei este egală cu vectorul care reprezintă numărul complex $\frac{3+i}{5}$.

69. $\frac{n}{2}-\frac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$.

71. a) $\dfrac{3\cos\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}}+\dfrac{\cos\dfrac{3(n+1)}{2}x\sin\dfrac{3nx}{2}}{4\sin\dfrac{3x}{2}}$;

b) $\dfrac{2\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}}-\dfrac{\sin\dfrac{3(n+1)}{2}x\sin\dfrac{3nx}{2}}{4\sin\dfrac{3x}{2}}$.

72. a) $\dfrac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$; b) $\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

73. $e^a(\cos b+i\sin b)$.

75. a) $-3;\ \dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{3}$; b) $-3;\ \dfrac{3\pm 5i\sqrt{3}}{2}$;

c) $-7;\ -1\pm i\sqrt{3}$; d) $-1;\ \dfrac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{2}$; e) $2;\ -1\pm\sqrt{3}$;

f) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4};\ \dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})$;

g) $\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3};\ \dfrac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3})$;

h) $1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4};\ \dfrac{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})$;

i) $-(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9});\ \dfrac{-2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})$;

j) $2;\ -1\pm 2i\sqrt{3}$; k) $2;\ -1\pm 3i\sqrt{3}$; l) $2;\ -1\pm 4i\sqrt{3}$;

m) $1;\ -2\pm\sqrt{3}$; n) $4;\ -1\pm 4i\sqrt{3}$; o) $-2i;\ i;\ i$;

p) $-1-i;\ -1-i;\ 2+2i$;

r) $-(a+b);\ \dfrac{a+b}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(a-b)$;

s) $-(a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2})$;

$\dfrac{a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(a\sqrt[3]{f^2g}-b\sqrt[3]{fg^2})$;

t) 2,1149; $-0,2541$; $-1,8608$;
u) 1,5981; 0,5115; $-2,1007$.

76. Soluție:

$$x_1 - x_2 = \alpha(1-\omega) + \beta(1-\omega^2) = (1-\omega)(\alpha - \beta\omega^2);$$
$$x_1 - x_3 = \alpha(1-\omega^2) + \beta(1-\omega) = 1-\omega^2)(\alpha - \beta\omega);$$
$$x_2 - x_3 = \alpha(\omega - \omega^2) + \beta(\omega^2 - \omega) = (\omega - \omega^2)(\alpha - \beta);$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = 3(\omega - \omega^2)(\alpha^3 - \beta^3);$$
$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = -27[(\alpha^3 + \beta^3)^2 - 4\alpha^3\beta^3] = -27q^2 - 4p^3.$$

77. Soluție.

Ecuația de gradul al treilea menționată în indicație este $z^3 - 3(px + q)z + x^3 + p^3 - 3qx - 3pq = 0$, care are în mod evident rădăcina $z = -(x + p)$. Celelalte rădăcini ale acestei ecuații sînt $z_{2,3} = \frac{x + p \pm \sqrt{-3(x-p)^2 + 12q}}{2}$. In virtutea problemei 76, membrul întîi al ecuației studiate poate fi scris sub forma

$$-\frac{1}{27}(x_2 - z_3)^2 (z_3 - z_1)^2 (z_1 - z_2)^2 = -\frac{1}{27}[-3(x-p)^2 + 12q] \times$$
$$\times \left[\frac{3(x+p) + \sqrt{-3(x-p)^2 + 12q}}{2}\right]^2 \left[\frac{3(x+p) - \sqrt{-3(x-p)^2 + 12q}}{2}\right]^2$$
$$= [(x-p)^3 - 4q](x^2 + px + p^2 - q)^2.$$

de unde rădăcinile se găsesc ușor

$$x_{1,2} = p \pm 2\sqrt{q}; \quad x_3 = x_4 = \frac{-p + \sqrt{4q - 3p^2}}{2};$$

$$x_5 = x_6 = \frac{-p - \sqrt{4q - 3p^2}}{2}.$$

78. Membrul întîi se va scrie sub forma
$$\alpha^5 + \beta^5 + 5(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - a)(\alpha\beta - a) - 2b = 0.$$

Răspuns. $x = \alpha + \beta$, unde

$$\alpha = \sqrt[5]{b + \sqrt{b^2 - a^5}}; \quad \beta = \sqrt[5]{b - \sqrt{b^2 - a^5}}; \quad \alpha\beta = a.$$

79. a) $\pm\sqrt{2};\ 1\pm i\sqrt{3};$ b) $-1\pm\sqrt{6};\ \pm i\sqrt{3};$

c) $\pm\sqrt{2};\ \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2};$ d) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2};$

e) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2};\ 1\pm i;$ f) $\frac{1\pm 2\sqrt{2}}{2};\ \frac{5\pm\sqrt{17}}{2};$

g) $\pm i;\ 1\pm i\sqrt{2};$ h) $\pm\sqrt{5};\ \frac{1\pm i\sqrt{7}}{2};$

i) $\pm i;\ -1\pm i\sqrt{6};$ j) $-2\pm 2\sqrt{2};\ -1\pm i;$

k) $1;\ 3;\ 1\pm\sqrt{2};$ l) $1;\ 1-1;\ 1\pm 2i;$

m) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4};\ \frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4};$

n) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4};\ \frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4};$

o) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1-2\sqrt{2}};\ \frac{1-\sqrt{2}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}};$

p) $1+\sqrt{7}\pm\sqrt{6+2\sqrt{7}};\ 1-\sqrt{7}\pm\sqrt{6-2\sqrt{7}};$

r) $\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2};\ \frac{1\pm\sqrt{-4\sqrt{3}-3}}{2};$

s) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-2-6\sqrt{5}}}{4};\ \frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{-2+6\sqrt{5}}}{4};$

t) $\frac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{-5+2\sqrt{2}}}{4};\ \frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{-5-2\sqrt{2}}}{4};$

u) $\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{4};\ \frac{1-\sqrt{3}\pm\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{4}.$

80. Soluție.

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}+mx+n\right)\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}-mx-n\right);$$

$$x_1x_2=\frac{\lambda}{2}+n;\quad x_3x_4=\frac{\lambda}{2}-n;\quad \lambda=x_1x_2+x_3x_4.$$

81. a) ± 1; b) $1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\pm 1; \pm i$;

d) $\pm 1; \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\pm 1; \pm i; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$;

f) $\pm 1; \pm i; \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;

g) $\pm 1; \pm i; \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i); \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;

$\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

82. a) -1; b) $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\pm i$; d) $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; f) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;

g) $\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

83. a) 20; 20; 180; b) 72; 144; 12.

84. $\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$, unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

85. a) Notînd $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{16} + i\sin\frac{2k\pi}{16}$, obţinem:

indicelui 1 îi aparţine ε_0;
indicelui 2 îi aparţine ε_8;
indicelui 4 îi aparţin $\varepsilon_4, \varepsilon_{12}$;
indicelui 8 îi aparţin $\varepsilon_2, \varepsilon_6, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{14}$;

rădăcinile primitive de ordinul al 16-lea sînt $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_9, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{15}$;

b) Notînd $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{20} + i\sin\frac{2k\pi}{20}$, obţinem:

indicelui 1 îi aparţine ε_0;
indicelui 2 îi aparţine ε_{10};
indicelui 4 îi aparţin $\varepsilon_5, \varepsilon_{15}$;
indicelui 5 îi aparţin $\varepsilon_4, \varepsilon_8, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{16}$;
indicelui 10 îi aparţin $\varepsilon_2, \varepsilon_6, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{18}$;

rădăcinile primitive de ordinul al 20-lea sînt: ε_1, ε_3, ε_7, ε_9, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}.

c) Notînd cu $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{24} + i\sin\frac{2k\pi}{24}$, obținem:

indicelui 1 îi aparține ε_0;
indicelui 2 îi aparține ε_{12};
indicelui 3 îi aparțin ε_8, ε_{16};
indicelui 4 îi aparțin ε_6, ε_{18};
indicelui 6 îi aparțin ε_4, ε_{20};
indicelui 8 îi aparțin ε_3, ε_9, ε_{15}, ε_{21};
indicelui 12 îi aparțin ε_2, ε_{10}, ε_{14}, ε_{22};

rădăcinile primitive de ordinul 24 sînt ε_1, ε_5, ε_7, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}, ε_{23}.

86. a) $X_1(x) = x - 1$; b) $X_2(x) = x + 1$;
c) $X_3(x) = x^2 + x + 1$; d) $X_4(x) = x^2 + 1$;
e) $X_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; f) $X_6(x) = x^2 - x + 1$;
g) $X_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; h) $X_8(x) = x^4 + 1$;
i) $X_9(x) = x^6 + x^3 + 1$; j) $X_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$;
k) $X_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; l) $X_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$;
m) $X_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$;
n) $X_{105}(x) = x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1$.

87. $\frac{2}{1-\varepsilon}$.

88. 0, dacă $n > 1$.

89. n, dacă k este divizibil cu n; 0, dacă k nu este divizibil cu n.

90. $m(x^m + 1)$.

91. $-\frac{n}{1-\varepsilon}$, dacă $\varepsilon \neq 1$; $\frac{n(n+1)}{2}$, dacă $\varepsilon = 1$.

92. $-\frac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$, dacă $\varepsilon \neq 1$; $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, dacă $\varepsilon = 1$.

93. a) $-\frac{n}{2}$; b) $-\frac{n}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.

94. a) 1; b) 0; c) -1.

95. $x_0 = 1$;

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$x_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

96. $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

97. *Soluţie.* Să împărţim ambii membri ai ecuaţiei $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ cu x^3. După o serie de transformări obţinem

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Ecuaţia $z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$ este satisfăcută de $z = 2\cos\frac{4\pi}{7} = -2\sin\frac{\pi}{14}$. De aici rezultă că $t = 2\sin\frac{\pi}{14}$ verifică ecuaţia $t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$. Ecuaţia obţinută este cea mai simplă, în sensul că orice ecuaţie cu coeficienţi raţionali, care are cu aceasta o rădăcină comună, este de grad mai înalt. Demonstrarea acestui fapt cere cunoştinţe mai avansate, conţinute în capitolele următoare din curs.

98. *Soluţie.* Fie $n = 2m$. Atunci, ecuaţia $x^n - 1 = 0$ are două rădăcini reale: 1 şi -1, şi $2m - 2$ rădăcini complexe.

Numărul $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{2m} + i\sin\frac{2k\pi}{2m}$ este conjugat cu $\varepsilon_{2m-k} =$

$$= \cos\frac{2(2m-k)\pi}{2m} + i\sin\frac{2(2m-k)\pi}{2m}.$$

Avem, astfel

$$x^{2m} - 1 = (x^2 - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \bar{\varepsilon}_1)(x - \varepsilon_2)(x - \bar{\varepsilon}_2)\ldots$$
$$\ldots (x - \varepsilon_{m-1})(x - \bar{\varepsilon}_{m-1});\quad x^{2m} - 1 =$$
$$=(x^2 - 1)[x^2 - (\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1)x + 1]\ldots[x^2 - (\varepsilon_{m-1} + \bar{\varepsilon}_{m-1})x + 1].$$

$$x^{2m} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{m=1}^{m-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{m} + 1\right).$$

Dacă $n = 2m + 1$, atunci obținem, în mod analog,

$$x^{2m+1} - 1 = (x - 1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2m+1} + 1\right).$$

99. *Soluție*: a) Avem:

$$\frac{x^{2m} - 1}{x^2 - 1} = \prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{m} + 1\right).$$

Punînd $x = 1$, obținem $m = 2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{m}\right)$,

sau $m = 2^{2(m-1)}\prod_{k=1}^{m-1}\sin^2\frac{k\pi}{2m}$ și în sfîrșit

$$\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}} = \prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{2m}.$$

Formula b) se obține pe cale analogă.

100. *Soluție.* In identitatea $x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \varepsilon_k)$,

unde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, punem $x = -\frac{a}{b}$. Obținem

$(-1)^n\frac{a^n}{b^n} - 1 = (-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b} + \varepsilon_k\right)$ etc.

101. Procedînd conform indicaţiei, avem:

$$\cos n\theta + i \sin n\theta - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(\cos\theta + i\sin\theta - \varepsilon_k),$$

$$\cos n\theta - i \sin n\theta - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(\cos\theta - i\sin\theta - \varepsilon_k).$$

Inmulţind ultimele egalităţi, obţinem rezultatul dorit.

102. *Soluţie.*

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(t+\varepsilon_k)^n - 1}{t} = \frac{1}{t^n}\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1}(t + \varepsilon_k - \varepsilon_s) =$$

$$= \frac{1}{t^n}\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1}\left[t - \varepsilon_k\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_k} - 1\right)\right] = \frac{1}{t^n}\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1}[t - \varepsilon_k(\varepsilon_s - 1)] =$$

$$= \frac{1}{t^n}\prod_{s=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}[t - \varepsilon_k(\varepsilon_s - 1)] = \frac{1}{t^n}\prod_{s=0}^{n-1}[t^n - (\varepsilon_s - 1)^n] =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1}[t_n - (\varepsilon_k - 1)^n].$$

103. Avem $|x| = |x|^{n-1}$ şi, prin urmare, $|x| = 0$ sau $|x| = 1$. Dacă $|x| = 0$, atunci $x = 0$. Dacă $|x| = 1$, atunci $x\bar{x} = 1$.

Pe de altă parte, $x\bar{x} = x^n$. Prin urmare, $x^n = 1$. Avem, aşadar

$$x = 0 \quad \text{şi} \quad x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Reciproca se verifică uşor.

104. *Soluţie.* Dacă z verifică ecuaţia dată, atunci $\frac{|z-a|}{|z-b|} = \sqrt[n]{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|}$. Locul geometric al punctelor ale căror distanţe la două puncte date sînt într-un raport constant este o circumferinţă (într-un caz particular — o dreaptă).

105. a) Avem $\frac{x+1}{x-1} = \varepsilon_k$, unde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$; $k = 1, 2, \ldots, m-1$. De aci $x = \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1}$. Transformarea acestei

din urmă expresii ne dă $x_k = i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$;

b) $x_k = \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$;

c) $x_k = \frac{a}{\varepsilon_k \sqrt[n]{2} - 1}$, unde $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$;

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

106. *Soluție.* Fie $A = \cos\varphi + i \sin\varphi$. Atunci, $\frac{1+ix}{1-ix} = \eta_k^2$, unde $\eta_k = \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{2m} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{2m}$; $k = 0, 1, \ldots, m-1$. De aici rezultă $x = \frac{\eta_k^2 - 1}{i(\eta_k^2 + 1)} = \frac{\eta_k - \eta_k^{-1}}{i(\eta_k + \eta_k^{-1})} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + 2k\pi}{2m}$.

107. *Soluție.* Procedînd conform indicației, avem

$$S + Ti = \mu(1 + \lambda x)^n; \quad S - Ti = \bar{\mu}(1 + \bar{\lambda} x)^n,$$

unde $\lambda = \cos\alpha + i \sin\alpha$, $\mu = \cos\varphi + i \sin\varphi$. De aici rezultă

$$2S = \mu(1 + \lambda x)^n + \bar{\mu}(1 + \bar{\lambda} x)^n.$$

Ecuația ia forma $\mu(1 + \lambda x)^n + \bar{\mu}(1 + \bar{\lambda} x)^n = 0$;

$$x_k = -\frac{\sin \frac{(2k+1)\pi - 2\varphi}{2n}}{\sin \frac{(2k+1)\pi - 2\varphi - 2n\alpha}{2n}}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

108. *Soluție.* Fie $\alpha^m = 1$; $\beta^n = 1$. Atunci $(\alpha\beta)^{mn} = (\alpha^m)^n \cdot (\beta^n)^m = 1$.

109. *Soluție.* Fie ε rădăcina comună a polinoamelor $x^m - 1$ și $x^n - 1$, iar s — indicele căruia îi aparține ε. Atunci s este un divizor comun al lui m și n. De aceea, s poate să fie egal numai cu 1 și $\varepsilon = 1$. Reciproca este evidentă.

110. *Soluție.* Fie α_k și β_s — rădăcini de ordinul m și n ale unității; $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$; $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Pe baza problemei 108 este suficient să arătăm că toate produsele $\alpha_k \beta_s$ sînt distincte. Să admitem că $\alpha_{k_1} \beta_{s_1} = \alpha_{k_2} \beta_{s_2}$. Atunci

$\frac{\alpha_{k_1}}{\alpha_{k_2}} = \frac{\beta_{s_2}}{\beta_{s_1}}$, adică $\alpha_i = \beta_j$. Pe baza problemei 109, $\alpha_i = \beta_j = 1$, adică $k_1 = k_2$; $s_1 = s_2$.

111. *Soluţie.* Fie α şi β rădăcini primitive de ordinul m şi n ale unităţii. Fie $(\alpha\beta)^s = 1$. Atunci $\alpha^{ns} = 1$; $\beta^{ms} = 1$. Rezultă că ns este divizibil cu m, ms este divizibil cu n. Prin urmare, s este divizibil cu mn.

Fie λ o rădăcină primitivă de ordinul mn a unităţii. Atunci, $\lambda = \alpha^k \beta^s$ (problema 110). Să presupunem că α^k aparţine indicelui $m_1 < m$. Atunci $\lambda^{m_1 n} = (\alpha^k)^{m_1 n} (\beta^s)^{m_1 n} = 1$, ceea ce este imposibil. Se poate arăta în acelaşi mod că β^s este o rădăcină primitivă de ordinul n a unităţii.

112. Rezultă imediat din problema 111.

113. Procedînd conform indicaţiei, se vor scrie toate numerele divizibile cu p şi care nu depăşesc pe p^α şi anume $1 \cdot p$, $2 \cdot p$, $3 \cdot p$, ..., $p^{\alpha-1} \cdot p$. Se vede imediat că există $p^{\alpha-1}$ asemenea numere. De aici rezultă că $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Pe baza problemei 112, obţinem $\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \varphi(p_2^{\alpha_2}) \ldots$

$$\varphi(p_k^{\alpha_k}) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

114. *Soluţie.* Dacă ε este o rădăcină primitivă de ordinul n a unităţii, atunci ε, conjugatul lui ε, este, de asemenea, o rădăcină primitivă de ordinul n a unităţii. In acest caz, $\varepsilon \neq \pm 1$, întrucît $n > 2$.

115. $X_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$.

116. $X_{p^m}(x) = x^{(p-1)p^{m-1}} + x^{(p-2)p^{m-1}} + \ldots + x^{p^{m-1}} + 1$.

117. Indicaţia poate fi utilizată imediat, ţinînd seamă de problema 111.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varphi(n)}$ rădăcinile primitive de ordinul n ale unităţii. Atunci $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_{\varphi(n)}$ sînt rădăcinile primitive de ordinul $2n$ ale unităţii. Avem:

$$X_{2n}(x) = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \ldots (x + \alpha_{\varphi(n)}) = \\ = (-1)^{\varphi(n)} (-x - \alpha_1) \ldots (-x - \alpha_{\varphi(n)}),$$

sau (v. problema 114): $X_{2n}(x) = X_n(-x)$.

118. *Soluție.* Fie $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{nd} + i\sin\frac{2k\pi}{nd}$ o rădăcină primitivă de ordinul nd a unității, adică k și n sînt prime între ele. Să împărțim pe k cu n; obținem $k = nq + r$, unde $0 < r < n$. De aici rezultă că $\varepsilon_k = \cos\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + i\sin\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d}$, adică ε_k este una dintre valorile rădăcinii de ordinul d din $\eta_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$; η_r este o rădăcină primitivă de ordinul n a unității, întrucît orice divizor comun al lui r și n este un divizor comun al lui k și n.

Fie acum $\eta_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$ o rădăcină primitivă de ordinul n a unității, adică r și n sînt prime între ele.

Să formăm $\varepsilon_q = \cos\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + i\sin\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} = \cos\frac{2\pi(r+nq)}{nd} + i\sin\frac{2\pi(r+nq)}{nd}$ unde $q=0, 1, 2, \ldots, d-1$. ε_q este o rădăcină primitivă de ordinul nd a unității. Într-adevăr, dacă $r+nq$ și nd ar fi fost ambii divizibili cu un număr prim p, atunci și n și r ar fi fost divizibili cu p, ceea ce este, însă, imposibil.

119. *Soluție.* Să presupunem că $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n')}$ sînt rădăcinile primitive de ordinul n' ale unității. Atunci $X_{n'}(x^{n''}) = \prod_{k=1}^{\varphi(n')}(x^{n''} - \varepsilon_k)$. Fie, mai departe, $(x-\varepsilon_{k,1})(x-\varepsilon_{k,2})\ldots(x-\varepsilon_{k,n''})$ descompunerea lui $x^{n''}-\varepsilon_k$ în factori liniari. Atunci $X_n(x^{n''}) = \prod_{\substack{k=1\\ i=1}}^{\substack{k=\varphi(n')\\ i=n''}}(x-\varepsilon_{k,i})$. Pe baza problemei 118 fiecare factor liniar $x-\varepsilon_{k,i}$ intră în descompunerea lui $X_n(x)$, și reciproc. Întrucît, înafară de aceasta, $\varphi(n)=n''\varphi(n')$, gradele lui $X_n(x)$ și $X_{n'}(x^{n''})$ sînt egale.

121. *Soluție.* Suma tuturor rădăcinilor de ordinul n ale unității este egală cu zero. Întrucît fiecare rădăcină de ordinul n a unității aparține unui indice d care este divizor al lui n și reciproc, rezultă că $\sum_{d/n}\mu(d)=0$.

122. *Soluție.* Fie $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ care aparține indicelui n_1. Atunci, factorul $x - \varepsilon_k$ va intra în acele și numai în acele binoame $x^d - 1$, pentru care d este divizibil cu n_1. Dacă d ia toate valorile divizorilor lui n care sînt multipli ai lui n_1, atunci $\frac{n}{d}$ ia toate valorile divizorilor lui $\frac{n}{n_1}$. Astfel, $x - \varepsilon_k$ va intra în membrul al doilea cu exponentul $\sum_{d_1/\frac{n}{n_1}} \mu(d_1)$. Această sumă este egală cu zero, dacă $\frac{n}{n_1} \neq 1$ și egală cu 1 dacă $n = n_1$.

123. *Soluție.* Dacă $n = p^a$, unde p este un număr prim, atunci $X_n(1) = p$. Dacă $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, unde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ sînt numere prime distincte, atunci (v. problema 119) $X_n(1) = X_{n'}(1)$, unde $n' = p_1 p_2 \ldots p_k$.

Să presupunem acum că $n = p_1\, p_2 \ldots p_k$; $k \geqslant 2$; $n_1 = \frac{n}{p_k}$. Să observăm că pentru obținerea tuturor divizorilor lui n este suficient să adăugăm la toți divizorii lui n_1 produsele lor cu p_k. De aceea

$$X_n(x) = \prod_{d/n} (x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} = \prod_{d/n_1} (x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \cdot \prod_{d:n_1} (x^{dp_k} - 1)^{\mu\left(\frac{n}{dp_k}\right)} =$$

$$= [X_{n_1}(x)]^{-1} \cdot X_{n_1}(x^{p_k}).$$

De aci rezultă $X_n(1) = 1$.

124. *Soluție.* 1) Fie n un număr impar mai mare decît unu. Atunci (v. problema 117) $X_n(-1) = X_{2n}(1) = 1$.

2) Fie $n = 2^k$. Atunci $X_n = \frac{x^n - 1}{x^{\frac{n}{2}} - 1} = x^{\frac{n}{2}} + 1$ și $X_n(-1)$ este egal cu 0, dacă $k = 1$, și egal cu 2 dacă $k > 1$.

3) Fie $n = 2n_1$, unde n_1 este un număr impar mai mare decît unitatea. Atunci (v. problema 117), $X_n(-1) = X_{n_1}(1)$ și, prin urmare $X_n(-1)$ este egal sau cu p, dacă $n_1 = p^a$ (p fiind un număr prim) sau cu 1, dacă $n_1 \neq p$.

4) Fie $n = 2^k n_1$, unde $k > 1$, iar $n_1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_s$ sînt numere prime impare diferite). În acest caz, (v. problema 119) $X_n(x) = X_{2p_1p_2\ldots p_s}(x^\lambda)$, unde $\lambda = 2^{k-1} p_1^{a_1 - 1} \ldots p_s^{a_s - 1}$. De aici rezultă că $X_n(-1) = X_n(1) = 1$.

125. *Soluție.* Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ rădăcinile primitive de ordinul n ale unității

$$s = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{\varphi(n)-1} \cdot \varepsilon_{\varphi(n)} = \frac{[\mu(n)]^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2)}{2}.$$

1) Fie n un număr impar, atunci ε_i^2, este o rădăcină primitivă de ordinul n a unității, iar $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_j^2$ numai pentru $i = j$. De aceea

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2 = \mu(n) \quad \text{și} \quad s = \frac{[\mu(n)]^2 - \mu(n)}{2}.$$

2) Fie $n = 2n_1$, n_1 fiind impar. În acest caz, ε_i (problema 111) este o rădăcină primitivă de ordinul n_1 a unității și de aceea (v. 1) $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2 = \mu(n_1) = -\mu(n)$. Astfel, în acest caz, $s = \frac{[\mu(n)]^2 + \mu(n)}{2}$.

3) Fie $n = 2^k n_1$, unde $k > 1$, n_1 fiind impar. În acest caz, ε_i^2 aparține indicelui $\frac{n}{2}$. Pe baza problemei 118 rezultă că $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ reprezintă rădăcinile pătrate din $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$, unde $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$ sînt rădăcinile primitive de ordinul $\frac{n}{2}$ ale unității. De aici rezultă că

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2 = 2(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}) = 2\mu\left(\frac{n}{2}\right)s = -\mu\left(\frac{n}{2}\right).$$

126. *Soluție.* $S = \sum_{x=0}^{n-1} \varepsilon^{x^2} = \sum_{x=y}^{y+n-1} \varepsilon^{x^2} = \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{(y+s)^2}$ pentru orice y întreg:

$$S' = \sum_{y=0}^{n-1} \varepsilon^{-y^2}; \quad S'S = \sum_{y=0}^{n-1} \varepsilon^{-y^2} S = \sum_{y=0}^{n-1} (\varepsilon^{-y^2} \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{(y+s)^2}) =$$

$$= \sum_{y=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{2ys+s^2} = \sum_{s=0}^{n-1} (\varepsilon^{s^2} \cdot \sum_{y=0}^{n-1} \varepsilon^{2ys}) = n + \sum_{s=1}^{n-1} \varepsilon^{s^2} \cdot \sum_{y=0}^{n-1} (\varepsilon^{2s})^y = n$$

pentru n impar.

$$SS' = n + n\varepsilon^{\left(\frac{n}{2}\right)^2} = n(1 + (-1)^{\frac{n}{2}}) \text{ pentru } n \text{ par.}$$

(Intrucît $\sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{2s\nu} = 0$ dacă $2s$ nu este divizibil cu n).

Aşadar $|S| = \sqrt{n}$, dacă n este impar şi $|S| = \sqrt{n[1+(-1)^{\frac{n}{2}}]}$, dacă n este par.

CAPITOLUL II

CALCULUL DETERMINANŢILOR

127. a) 5; b) 5; c) 1; d) $ab-c^2-d^2$; e) $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$; f) $\sin(\alpha-\beta)$; g) $\cos(\alpha+\beta)$; h) $\sec^2\alpha$; i) -2; j) 0; k) $(b-c)\times$ $\times(d-a)$; l) $4ab$; m) -1; n) -1; o) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

128. a) 1; b) 2; c) $2a^2(a+x)$; d) 1; e) -2; f); $-2-\sqrt{2}$; g) $-3i\sqrt{3}$; h) -3.

129. Numărul transpoziţiilor este impar.

130. a) 10; b) 18; c) 36. **131.** a) $i=8$; $k=3$; b) $i=3$; $k=6$.

132. C_n^2. **133.** C_n^2-J. **134.** a) $\frac{n(n-1)}{2}$; b) $\frac{n(n+1)}{2}$.

135. a) $\frac{n(3n+1)}{2}$; b) $\frac{3n(n-1)}{2}$.

136. Să considerăm perechea de elemente a_i şi a_k, unde $i<k$. Dacă aceste elemente nu prezintă o inversiune, atunci, chiar după aranjarea permutării în ordinea iniţială, a_i va preceda pe a_k şi, prin urmare, indicii i şi k nu vor da o inversiune.

Dacă elementele a_i şi a_k prezintă o inversiune, atunci, după aranjarea permutării în ordinea iniţială, a_k va preceda pe a_i şi, deci, indicii i şi k vor da o inversiune.

137. Permutarea este impară în ambele cazuri. Aceasta se explică prin faptul că unul dintre ordinele iniţiale se obţine din celălalt printr-un număr par de transpoziţii.

138. a) cu semnul +; b) cu semnul +.

139. a) nu intră; b) intră.

140. $i=1$; $k=4$.

141. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ şi $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

142. $-a_{14}a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}$.

143. Cu semnul $+$. **144.** Cu semnul $(-1)\ C_n^2$.

146. 2; -1. **147.** a) $n!$; b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; c) $n!$

148. a) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\ (n!)^{n+1}$; b) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\ (n!)^{n+1}$.

149. *Soluție*: Cînd se înlocuiesc liniile prin coloane, determinantul: 1) nu se va schimba; 2) se va transforma într-un număr complex conjugat.

150. *Soluție.* Cînd se înlocuiesc liniile prin coloane, determinantul 1) nu se va schimba; 2) se va înmulți cu -1.

151. $(-1)^{n-1}\Delta$. **152.** Se va înmulți cu $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

153. 0, deoarece numărul permutărilor pare de n elemente este egal cu numărul permutărilor impare.

154. a) $x_1 = a_1$; $x_2 = a_2$; ...; $x_{n-1} = a_{n-1}$;

b) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; ...; $x_{n-1} = n-2$;

c) $x_1 = a_1$; $x_2 = a_2$; ...; $x_{n-1} = a_{n-1}$.

156. 0. **158.** $(mq-np)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

159. a) $a_1a_2 \ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$;

b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_1a_2 \ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

160. $3a-b+2c+d$. **161.** $4t-x-y-z$. **162.** $2a-b-c-d$.

163. $-1\,487\,600$. **164.** $-29\,400\,000$. **165.** 48. **166.** 1.

167. 160. **168.** 12. **169.** 900. **170.** 394. **171.** 665.

172. $a^2+b^2+c^2-2(bc+ca+ab)$. **173.** $-2(x^3+y^3)$.

174. $(x+1)(x^2-x+1)^2$. **175.** x^2z^2. **176.** $-3(x^2-1)(x^2-4)$.

177. $\sin(c-a)\sin(c-b)\sin(a-b)$. **178.** $(af-be+cd)^2$. **179.** $n!$

180. $b_1b_2 \ldots b_n$. **181.** $(x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n)$.

182. $(n-1)!$ **183.** $-2(n-2)!$ **184.** 1.

185. $\frac{na^{n-1}}{2}[2a+(n-1)h]$. **186.** $\frac{na^{n-1}}{2}[2a+(n-1)h]$.

187. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n a_n]$.

188. $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. **189.** $\frac{nx^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)^2}$.

190. $(n+1)!\,x^n$. **191.** $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

192. $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$. **193.** $\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$.

194. $(-1)^n(n+1)a_1a_2\ldots a_n$.

195. $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a^n}\right)$.

196. $h(x+h)^n$. **197.** $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

198. $(-1)^n 2^{n-1}a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

199. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. **200.** $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$.

201. $\prod_{k=1}^{n}(1-ax_{kk})$. **202.** $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1)$.

203. $(-1)^n(a_0b_0+a_1b_1+\ldots+a_nb_n)b_1b_2\ldots b_{n-1}$.

204. $a(a+b)(a+2b)\ldots[a+(n+1)b]$.

205. $x^n+(-1)^{n-1}y^n$. **206.** 0, dacă $n>2$. **207.** 0, dacă $n>2$.

208. Fie $n=2$. Procedînd conform indicaţiei, avem:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_1+x_2 \\ 0 & a_2+x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+x_1 & 0 \\ a_2+x_1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1+x_2 \\ a_2+x_1 & a_2+x_2 \end{vmatrix} = 1+[(a_1+x_1)+(a_2+x_2)]+(a_2-a_1)(x_1-x_2).$$

Reprezentînd în acelaşi mod, determinantul de ordinul n sub formă de sumă de 2^n determinanţi, deducem că unul dintre termenii sumei este egal cu unitatea, n termeni sînt egali cu a_i+x_i, unde $i=1, 2, \ldots, n$ şi $\frac{n(n-1)}{2}$ termeni sînt egali cu $(a_i-a_k)(x_k-x_i)$, unde $i>k$.

Ceilalţi termeni sînt nuli. Aşadar

$$1+\sum_{i=1}^{n}(a_i+x_i)+\sum_{i>k}(a_i-a_k)(x_k-x_i).$$

Acest rezultat poate fi pus sub forma

$$(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)-$$
$$-n(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n).$$

209. 0, dacă $p>2$. **211.** $\frac{n+1}{1-x}+\frac{x^{n+1}-1}{(1-x)^2}$.

212. *Soluție.* Se vede ușor că $\Delta_2=x_1x_2\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}\right)$.

Să admitem că

$$\Delta_{n-1}=x_1x_2\ldots x_{n-1}\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}\right).$$

Atunci $\Delta_n=x_1x_2\ldots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}\right)+$

$$+a_nx_1x_2\ldots x_{n-1}=x_1x_2\ldots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n}{x_n}\right).$$

213. $a_0x_1x_2\ldots x_n+a_1y_1x_2\ldots x_n+a_2y_1y_2x_3\ldots x_n+\ldots+$
$+a_ny_1y_2\ldots y_n$.

214. $-a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

215. $n!\,(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)$.

216. $a_1a_2\ldots a_{n-1}-a_1a_2\ldots a_{n-2}+\ldots+(-1)^n a_1+(-1)^{n+1}$.

217. *Soluție.* Să dezvoltăm determinantul după elementele primei coloane; obținem: $\Delta_n=(\alpha+\beta)\Delta_{n-1}-\alpha\beta\Delta_{n-2}$. Se verifică ușor că $\Delta_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$; $\Delta_3=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}$. Să admitem că

$\Delta_{n-2}=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$; $\Delta_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$. Atunci

$$\Delta_n=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

Altă variantă a soluției.

Să reprezentăm Δ_n sub forma sumei $d_n+\delta_n$, unde

$$d_n=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix},$$

$$\delta_n=\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

Din prima linie a lui d_n scoatem ca factor comun pe α și apoi din linia a doua scădem prima. Obținem $d_n=\alpha d_{n-1}$. Se vede ușor că $d_2=\alpha^2$. Să presupunem că $d_{n-1}=\alpha^{n-1}$. Atunci $d_n=\alpha^n$.

Dezvoltînd δ_n după elementele primei linii, observăm că

$$\delta_n=\beta\,\Delta_{n-1}.$$

Din cele de mai sus, rezultă că $\Delta_n=\alpha^n+\beta\,\Delta_{n-1}$. Se verifică ușor că $\Delta_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$. Să presupunem că $\Delta_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$.

Atunci $\Delta_n=a^n+\beta\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

218. $n+1$. **219.** $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. **220.** $\cos n\theta$.

221. $x^n-C^1_{n-1}x^{n-2}+C^2_{n-2}x^{n-4}-\dots$ Să va compara cu problema 53.

222. $x_1y_n\prod_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})$.

223. $a_1a_2\dots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)$.

224. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\dots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)$.

225. $x(a_1-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right)$.

226. $(x_1-a_1)(x_2-a_2)\dots(x_n-a_n)\left(1+\frac{a_1}{x_1-a_1}+\dots+\frac{a_n}{x_n-a_n}\right)$.

227. $\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_ib_i\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i-a_ib_i}\right)$.

228. $(-1)^n m^n\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m}\right)$.

229. $x_1=x_2=\dots=x_{n-1}=0$; $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i}$.

230. $(a^2-b^2)^n$. **231.** $a(a+b)\dots[a+(n-1)\,b]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\dots+\frac{1}{a+(n-1)\,b}\right)$.

232. $x^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-2a_i)\left(x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x-2a_i}\right)$.

233. $x^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-2a_i)\left(x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x-2a_i}\right)$.

234. $1-b_1+b_1b_2-b_1b_2b_3+\dots+(-1)^n b_1b_2\dots b_n$.

235. $(-1)^{n-1}(b_1a_2a_3\dots a_n+b_1b_2a_3\dots a_n+\dots+b_1b_2\dots b_{n-1}a_n)$.

236. $(-1)^{n-1}x^{n-2}$. **237.** $(-1)^n[(x-1)^n-x^n]$.

238. $a_0x^n\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$. **240.** 1. **241.** 1. **242.** 1.

243. $\frac{C_{m+n}^{n+1}\cdot C_{m+n-1}^{n+1}\cdots C_{m+n-k+1}^{n+1}}{C_{k+n}^{n+1}C_{k+n-1}^{n+1}\cdots C_{n+1}^{n+1}}$. **244.** $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

245. $(x-1)^n$. **246.** $(n-1)!\,(n-2!)\dots 1!\,(x-1)^n$. **247.** α^n.

248. Procedînd conform indicaţiei, obţinem

$$\Delta_n = (x-z)\,\Delta_{n-1} + z(x-y)^{n-1},$$
$$\Delta_n = (x-y)\,\Delta_{n-1} + y(x-z)^{n-1}.$$

Din sistemul de ecuaţii obţinut, găsim

$$\Delta_n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}.$$

249. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \dfrac{ab(b^{n-1}-a^{n-1})}{a-b}$.

250. $\dfrac{xf(y)-yf(x)}{x-y}$, unde $f(x) = \prod_{k=1}^{n} (a_k - x)$.

251. $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$, unde $f(x) = \prod_{k=1}^{n} (c_k - x)$.

252. $(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\,\lambda\beta-(n-1)ab]$.

253. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

254. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (nh)^{n-1} \left[a + \dfrac{h(n-1)}{2}\right]$. **255.** $(1-x^n)^{n-1}$.

256. Dacă adunăm toate coloanele la prima, putem scoate înafara determinantului factorul comun $a+b+c+d$, iar toate elementele determinantului rămas sînt expresii întregi în raport cu a.

Aceasta demonstrează că determinantul este divizibil cu $a+b+c+d$. Dacă la prima coloană adunăm coloana a doua şi scădem coloana a treia şi a patra, observăm că determinantul este divizibil cu $a+b-c-d$. Procedînd în acelaşi mod, vom arăta că determinantul este divizibil cu $a-b+c-d$ şi cu $a-b-c+d$. Din cele de mai sus rezultă că determinantul este egal cu $\lambda(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$. Pentru determinarea lui λ vom observa că coeficientul termenului a^4 trebuie să fie 1; de aceea $\lambda=1$.

257.

$$(a+b+c+d+e+f+g+h)(a+b+c+d-e-f-g-h)\times$$
$$\times(a+b-c-d+e+f-g-h)(a+b-c-d-e-f+g+h)\times$$
$$\times(a-b+c-d+e-f+g-h)(a-b+c-d-e+f-g+h)\times$$
$$\times(a-b-c+d+e-f-g+h)(a-b-c+d-e+f+g-h).$$

258. $(x+a_1+a_2+\ldots a_n)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

259. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\leqslant i<k\leqslant n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{1\leqslant i<k\leqslant n} \sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$.

260. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \cos\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

261. $1!\,2!\ldots n!$. **262.** $\prod_{n+1\geqslant k>i\geqslant 1}(a_i-a_k)$.

263. $(-1)^n\ 1!\,2!\ldots n!$

264. $(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(a_i-a_k)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{a_i f'(a_i)}\right)$,

unde $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

265. $\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

266. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \cos\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

267. $\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

268. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{01}a_{02}\ldots a_{0n-1} \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\times$

$$\times \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}.$$

269. $\frac{1}{1!\,2!\ldots(n-1)!} \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

271. $1!\,3!\,5!\ldots(2n-1)!$ **272.** $\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i-1} \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

273. $\prod_{n+1\geqslant k>i\geqslant 1}(b_k a_i-a_k b_i)$. **274.** $\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}\sin(\alpha_i-\alpha_k)$.

275. $\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n+1}(a_i-a_k)(a_i a_k-1)$.

276. $2^{(n-1)2} \prod_{n-1 \geqslant i > k \geqslant 0} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{n-1 \geqslant i > k \geqslant 0} \sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$.

277. $2^{n(n+1)} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \ldots$

$$\ldots \sin\alpha_n \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 0} \sin\frac{\alpha_i+\alpha_k}{2} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 0} \sin\frac{\alpha_i-\alpha_k}{2}.$$

278. $[x_1x_2 \ldots x_n-(x_1-1) \ldots (x_n-1)] \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)$.

279. $x_1x_2 \ldots x_n \left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)$.

280. $(x_1+x_2+\ldots+x_n) \prod_{n \geqslant i \geqslant k \geqslant 1} (x_i-x_k)$.

281. $\sigma_{n-s} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)$, unde σ_p reprezintă suma tuturor produselor posibile ale numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, luate cîte p.

282. $[2x_1x_2 \ldots x_n - (x_1-1)(x_2-1) \ldots (x_n-1)] \times \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)$.

283. $x^2(x^2-1)^4$. **284.** $2x^3y(x-y)^6$.

285. $1!\,2!\,3! \ldots (n-1)!\, x^{\frac{n(n-1)}{2}} (y-x)^n$.

286. $1!\,2!\,3! \ldots (k-1)!\, x^{\frac{k(k-1)}{2}} (y_1-x)^k (y_2-x)^k \ldots (y_{n-k}-x)^k \prod_{n-k \geqslant i > j \geqslant 1} (y_i-y_j)$.

287. $(y-x)^{k(n-k)}$.

288. b) 9; c) 5; e) 128; f) $(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2)$;

g) $(x_3-x_2)^2(x_3-x_1)^2(x_2-x_1)^2$;

h) $(\lambda^2-a^2)(\alpha-\beta)^{n-1}[\alpha+(n-1)\beta]$;

k) $(x_4-x_3)[(x_3-x_2)(x_4-x_2)-2(x_3-x_1)\times(x_4-x_1)]$;

m) $27(a+2)^3(a-1)^6[3(a+2)^2-4x^2]\times[3(a-1)^2-4x^2]^2$.

Observație. Această problemă reprezintă un caz particular al problemei 537.

289. a) $\begin{vmatrix} -5, & -2 \\ -8, & 4 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 2, & 8, & 17 \\ 11, & -6, & 5 \\ 3, & 8, & -3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 7, & 5, & -3, & 3 \\ -1, & 5, & -3, & 3 \\ -4, & -4, & -5, & 4 \\ -4, & -4, & 0, & 3 \end{vmatrix}$.

290. a) 24; b) 18;

c) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)\times$
$\times(a-b-c+d)$.

291. a) 256; b) 78 400; c) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$.

292. $D. \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k)$.

293. a) $C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^n \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 0} (a_i - a_k)(b_k - b_i)$.

b) $\prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (\alpha_i - \alpha_k)(\beta_i - \beta_k)$.

294. 0, dacă $n \geqslant 2$. **295.** $\prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \cdot \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k)^2$.

296. $-(a^2+b^2+c^2+d^2+l^2+m^2+n^2+p^2)^4$

297. $4\sin^4\varphi$. **298.** $4\sin^4\varphi$.

299. Să notăm determinantul căutat cu Δ_n. Ridicînd la pătrat, obținem $|\Delta| = n^{\frac{n}{2}}$. Pe de altă parte $\Delta = \prod_{n-1 \geqslant k > s \geqslant 0} (\varepsilon^k - \varepsilon^s)$.

Să punem $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$. Atunci $\varepsilon = \varepsilon_1^2$ și $\Delta = \prod_{n-1 \geqslant k > s \geqslant 0} (\varepsilon^k - \varepsilon^s) = \prod \varepsilon_1^{k+s} \prod (\varepsilon_1^{k-s} - \varepsilon_1^{-k+s}) =$

$= \prod \varepsilon_1^{k+s} \cdot i^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}$. Mai departe $\sin\frac{(k-s)\pi}{n} > 0$,

pentru orice k, s. Prin urmare $n^{\frac{n}{2}} = |\Delta| = \left|\prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}\right| =$

$= \prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}$.

De aceea $\Delta = n^{\frac{n}{2}} i^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n-1 \geqslant k > s \geqslant 0} \varepsilon_1^{k+s} = n^{\frac{n}{2}} i^{\frac{n(n-1)}{2}} \varepsilon_1^{\frac{n(n-1)^2}{2}} =$

$= n^{\frac{n}{2}} i^{\frac{n(n-1)}{2} + (n-1)^2} = n^{\frac{n}{2}} i^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

300. $\prod_{k=0}^{n-1} (a_0 + a_1\varepsilon_k + a_2\varepsilon_k^2 + \ldots + a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1})$, unde $\varepsilon_k =$

$= \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$.

301. $x^4 - y^4 + z^4 - u^4 + 4xy^2z + 4xzu^2 - 4x^2yu -$

$- 4yz^2u - 2x^2z^2 + 2y^2u^2$.

303. 2^{n-1}, dacă n este impar; 0, dacă n este par.

304. $(-1)^n \frac{[(n+1)a^n - 1]^n - n^n a^{n(n+1)}}{(1-a^n)^2}$.

305. $(-1)^{n-1}(n-1) \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2\varepsilon_k + \ldots + a_n\varepsilon_k^{n-1})$, unde $\varepsilon_k =$

$= \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$.

306. $\varphi_0(t)\,\varphi_1(t) \ldots \varphi_{n-1}(t)$, unde $\varphi_k(t) = \frac{(t+\varepsilon_k)^n - 1}{t}$;

$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$.

In conformitate cu rezultatul problemei 102, răspunsul poate fi reprezentat sub forma $\prod_{k=1}^{n-1} [t^n - (\varepsilon_k - 1)^n]$.

307. $(-2)^{n-1}(n-2p)$, dacă $(n, p) = 1$; 0, dacă $(n, p) \neq 1$.

308. $2^{n-2}\left(\cos^n\frac{\pi}{n} - 1\right)$.

309. $2^{n-2} \sin^{n-2}\frac{n\theta}{2}\left[\sin^n\frac{(n+2)\theta}{2} - \sin^n\frac{n\theta}{2}\right]$.

310. $(-1)^n 2^{n-2} \sin^{n-2} \frac{nh}{2} \left[\cos^n \left(a + \frac{nh}{2} \right) - \right.$

$\left. - \cos^n \left(a + \frac{(n-2)h}{2} \right) \right].$

311. $(-1)^{n-1} \frac{(n+1)(2n+1)}{12} n^{n-2} [(n+2)^n - n^n].$

313. $\prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2 \varepsilon_k + a_3 \varepsilon_k^2 + \ldots + a_n \varepsilon_k^{n-1}),$

unde $\varepsilon_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$.

315. $\prod_{i=1}^{n} (a_1 + a_2 \rho_i + a_3 \rho_i^2 + \ldots + a_n \rho_i^{n-1}),$

unde $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ sînt rădăcinile de ordinul n din μ.

318. Soluția problemei 223. Adunînd la toate elementele determinantului $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$ cîte 1, obținem determinantul Δ.

Avem $\Delta = a_1 a_2 \ldots a_n + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ik}$;

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} = a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Soluția problemei 250. Să notăm determinantul calculat cu Δ.

Avem

$$\Delta = (a_1 - x)(a_2 - x) \ldots (a_n - x) + x \sum A_{ik};$$

$$\Delta = (a_1 - y)(a_2 - y) \ldots (a_n - y) + y \sum A_{ik},$$

unde $\sum A_{ik}$ este suma complementilor algebrici ai tuturor elementelor lui Δ.

Δ se determină uşor din sistemul de ecuaţii de mai sus.

323. $\prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_i - a_k) \cdot \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (b_i - b_k) \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} f(a_i)}$,

unde $f(x) = (x + b_1) \ldots (x + b_n)$.

325. $\frac{[c + \sqrt{c^2 - 4ab}]^{n+1} - [c - \sqrt{c^2 - 4ab}]^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{c^2 - 4ab}}$.

326. $\frac{[p + \sqrt{p^2 - 4q}]^n + [p - \sqrt{p^2 - 4q}]^n}{2^n}$.

327. $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$, unde a_k este suma tuturor minorilor de ordinul k ai determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

obţinuţi din acesta prin suprimarea a $n - k$ linii cu indicii, respectiv, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$ şi a coloanelor cu aceiaşi indici.

328. $(n + 1)^{n-1}$. **329.** $(x - n)^{n+1}$.

330. $(x^2 - 1^2)(x^2 - 3^2) \ldots [x^2 - (2m - 1)^2]$, dacă $n = 2m$, $x(x^2 - 2^2)(x^2 - 4^2) \ldots (x^2 - 4m^2)$, dacă $n = 2m + 1$.

331. $(x + na - n)[x + (n - 2)a - n + 1] \times$
$\times (x + (n - 4)a - n + 2) \ldots (x - na)$.

332. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [(n - 1)!]^n$. **333.** $\frac{[1!\,2! \ldots (n-1)!]^3}{n!\,(n+1)! \ldots (2n-1)!}$.

334. $\frac{\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,\Delta(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{\Delta(1, 2, \ldots, n)}$, unde Δ este determinantul lui Vandermonde.

CAPITOLUL III

SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

335. $x_1 = 3$; $x_2 = x_3 = 1$.
336. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$.
337. $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 3$.
338. $x_1 = 3$; $x_2 = 4$; $x_3 = 5$.

339. $x_1 = x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$.
340. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$; $x_4 = -2$.
341. $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$; $x_4 = 3$.
342. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$.
343. $x_1 = 2$; $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
344. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
345. $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2$.
346. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.
347. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
348. $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$; $x_5 = 1$.
349. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.
350. $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$; $x_5 = 1$.
351. $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$; $x_4 = 0$; $x_5 = 3$.
352. $x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2$; $x_4 = -2$; $x_5 = 1$.

353. Determinantul sistemului este nul, deoarece sistemul are o soluție nebanală (nenulă).

354. Determinantul sistemului este egal cu $-(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

355. $x_i = \dfrac{\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k - a_i[(n-1)\alpha + \beta]}{(\alpha - \beta)[(n-1)\alpha + \beta]}$.

356. $x_i = -\dfrac{f(\beta_i)}{\varphi'(\beta_i)}$, unde $f(x) = (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$, $\varphi(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)$.

357. $x_i = \dfrac{f(t)}{(t-\alpha_i)f'(\alpha_i)}$, unde $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$.

358. $x_s = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{n+s} u_i}{f'(\alpha_i)} \varphi_{s,i}$, unde $f(x) = (x-\alpha_1)\ldots$ $\ldots(x-\alpha_n)$; $\varphi_{s,i} = \sum \alpha_{t_1} \alpha_{t_2} \ldots \alpha_{t_{n-s}}$, sumarea extinzîndu-se la toate combinările $t_1, t_2, \ldots, t_{n-s}$ formate cu $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$.

359. $x_s = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{n+i} u_i}{f'(\alpha_s)} \varphi_{i,s}$, unde $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots$ $\ldots(x-\alpha_n)$; $\varphi_{i,s} = \sum \alpha_{t_1} \alpha_{t_2} \ldots \alpha_{t_{n-1}}$, sumarea extinzîndu-se la toate combinările $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ formate cu $1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$.

360. $x_i = \frac{(-1)^n a_{n-i}}{n!}$, unde $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = (x-1)(x-2)\ldots(x-n)$.

361. $C_m^k \cdot C_n^k$.

365. a) Rămîne neschimbat sau se măreşte cu o unitate;
b) rămîne neschimbat sau se măreşte cu o unitate, sau cu două.

366. 2. **567.** 3. **368.** 2. **369.** 2. **370.** 3. **371.** 3. **372.** 4. **373.** 3. **374.** 2. **375.** 3. **376.** 5. **377.** 6. **378.** 5. **379.** 3. **380.** 4.

383. Formele sînt independente.

384. $2y_1 - y_2 - y_3 = 0$.

385. $y_1 + 3y_2 - y_3 = 0$; $2y_1 - y_2 - y_4 = 0$.

386. Formele sînt independente.

387. $y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 0$.

388. $y_1 - y_2 + y_3 = 0$; $5y_1 - 4y_2 + y_4 = 0$.

389. Formele sînt independente.

390. Formele sînt independente.

391. $y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 0$;

392. $2y_1 - y_2 - y_3 = 0$.

393. $3y_1 - y_2 - y_3 = 0$; $y_1 - y_2 - y_4 = 0$.

394. Formele sînt independente.

395. $y_1 - y_2 - y_3 - y_4 = 0$.

396. $3y_1 - 2y_2 - y_3 + y_4 = 0$; $y_1 - y_2 + 2y_3 - y_5 = 0$.

397. $\lambda = 10$; $3y_1 + 2y_2 - 5y_3 - y_4 = 0$.

398. $x_3 = 2x_2 - x_1$; $x_4 = 1$.

399. $\lambda = 5$.

400. Sistemul nu are soluţii.

401. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$.

402. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

403. $x_1 = -\frac{11x_3}{7}$; $x_2 = -\frac{x_3}{7}$.

404. Sistemul nu are soluţii.

405. $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{5}{3}$; $x_4 = -\frac{4}{3}$.

406. $x_1 = -8$; $x_2 = 3 + x_4$; $x_3 = 6 + 2x_4$.

407. $x_1 = 2$; $x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

408. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

409. $x_1 = \frac{3x_3 - 13x_4}{17}$; $x_2 = \frac{19x_3 - 20x_4}{17}$.

410. $x_1 = \frac{7}{6}x_5 - x_3$; $x_2 = \frac{5}{6}x_5 + x_3$; $x_4 = \frac{x_5}{3}$.

411. $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5$;
$x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$.

412. $x_1 = \frac{-4x_4 + 7x_5}{8}$; $x_2 = \frac{-4x_4 + 5x_5}{8}$; $x_3 = \frac{4x_4 - 5x_5}{8}$.

413. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = x_5$.

414. $x_1 = \frac{1 + x_5}{3}$; $x_2 = \frac{1 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5}{3}$.

415. $x_1 = \frac{2 + x_5}{3}$; $x_2 = \frac{1 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5}{6}$.

416. Sistemul nu are soluții.

417. Sistemul nu are soluții.

418. $x_1 = -\frac{x_5}{2}$; $x_2 = -1 - \frac{x_5}{2}$; $x_3 = 0$; $x_4 = -1 - \frac{x_5}{2}$.

419. $x_1 = \frac{1 + 5x_4}{6}$; $x_2 = \frac{1 - 7x_4}{6}$; $x_3 = \frac{1 + 5x_4}{6}$.

420. Sistemul nu are soluții.

421. $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

422. Dacă $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0$, $x = -\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}$; $y = \frac{1}{\lambda + 2}$;
$z = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}$.

Dacă $\lambda = 1$, sistemul are soluții care depind de doi parametri.

Dacă $\lambda = -2$, sistemul nu are soluții.

423. Dacă $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$, $x = -\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 2}{\lambda + 3}$;
$y = -\frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{\lambda + 3}$; $z = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 3}$; $t = \frac{\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda + 3}$.

Dacă $\lambda = 1$, sistemul are soluții care depind de trei parametri.

Dacă $\lambda = -3$, sistemul nu are soluții.

424. Dacă a, b, c sînt toate distincte, atunci

$$x = abc; \quad y = -(ab + ac + bc); \quad z = a + b + c.$$

Dacă printre a, b, c există două numere egale, soluțiile depind de un parametru.

Dacă $a = b = c$, soluțiile depind de doi parametri.

425. Dacă numerele a, b, c sînt toate distincte, atunci

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}\ ;\ y = \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}\ ;\ z = \frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}\ .$$

Dacă $a = b$, $a \neq c$, $d = a$ sau $d = c$, atunci soluțiile depind de un parametru.

Dacă $b = c$, $a \neq b$, $d = a$ sau $d = b$, atunci soluțiile depind de un parametru.

Dacă $a = c$, $a \neq b$, $d = a$ sau $d = b$, atunci soluțiile depind de un parametru.

Dacă $a = b = c = d$, soluțiile depind de doi parametri.

In toate celelalte cazuri, sistemul nu are soluții.

426. Dacă $b(a-1) \neq 0$, atunci $x = \frac{2b-1}{b(a-1)}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}$.

Dacă $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, soluțiile depind de un parametru.

In toate celelalte cazuri, sistemul nu are soluții.

427. Dacă $b(a-1)(a+2) \neq 0$, atunci

$$x = z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, y = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}.$$

Dacă $a = -2$; $b = -2$, soluțiile depind de un parametru.

Dacă $a = 1$; $b = 1$, soluțiile depind de doi parametri.

In toate celelalte cazuri, sistemul nu are soluții.

428. Dacă $(\alpha-1)(\alpha+2) \neq 0$, atunci $x = \frac{m\alpha+m-n-p}{(\alpha+2)(\alpha-1)}$, $y = \frac{n\alpha+n-m-p}{(\alpha+2)(\alpha-1)}$; $z = \frac{p\alpha+p-m-n}{(\alpha+2)(\alpha-1)}$.

Dacă $\alpha = -2$ și $m+n+p = 0$, soluțiile depind de un parametru.

Dacă $\alpha = 1$ și $m = n = p$, soluțiile depind de doi parametri.

In toate celelalte cazuri, sistemul nu are soluții.

429. Dacă $a(a-b) \neq 0$, atunci $x = \frac{a^2(b-1)}{b-a}$; $y = \frac{b(a^2-1)}{a(a-b)}$, $z = \frac{a-1}{a(b-a)}$.

Dacă $a = b = 1$, soluțiile depind de doi parametri.

In toate celelalte cazuri, sistemul nu are soluții.

430. $\Delta = \lambda^2(\lambda - 1)$. Pentru $\lambda = 0$; $\lambda = 1$ sistemul este incompatibil.

431. $\Delta = -2\lambda$. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci $x = 1 - \lambda$; $y = \lambda$; $z = 0$.

Dacă $\lambda = 0$, atunci $x = 1$, $z = 0$, y este arbitrar.

432. $\Delta = (k-1)^2(k+1)$. Dacă $k = 1$, soluția depinde de un parametru.

Dacă $k = -1$, sistemul este incompatibil.

433. $\Delta = a(b-1)(b+1)$.

Dacă $a = 0, b = 5$, atunci $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{4}{3}$, x este arbitrar.

Dacă $a = 0$, $b \neq 1$ și $b \neq 5$, sistemul este incompatibil.

Dacă $b = 1$, $z = 0$, $y = 1 - ax$, x este arbitrar.

Dacă $b = -1$, sistemul este incompatibil.

434. a) $\Delta = -m(m+2)$. Pentru $m = 0$ și $m = -2$, sistemul este incompatibil.

b) $\Delta = m(m^2 - 1)$. Dacă $m = 0$, $m = 1$ sistemul este incompatibil. Dacă $m = -1$, soluția depinde de un parametru.

c) $\Delta = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Dacă $\lambda = 1$ și $\lambda = -1$, sistemul este incompatibil. Dacă $\lambda = 0$, soluția depinde de un parametru.

435. a) $\Delta = 3(c+1)(c-1)^2$. Dacă $c = -1$, sistemul este incompatibil. Dacă $c = 1$, soluția depinde de doi parametri.

b) $\Delta = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Dacă $\lambda = 2$ și $\lambda = 3$, sistemul este incompatibil. Dacă $\lambda = 1$, soluția depinde de un parametru.

c) $\Delta = d(d-1)(d+2)$. Dacă $d = 1$, $d = -2$, sistemul este incompatibil. Dacă $d = 0$, soluția depinde de un parametru.

d) $\Delta = (a-1)^2(a+1)$. Dacă $a = -1$, sistemul este incompatibil. Dacă $a = 1$, soluția depinde de doi parametri.

436. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

437. Atunci şi numai atunci cînd

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

438. Atunci şi numai atunci cînd

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

439. Atunci şi numai atunci cînd $\begin{vmatrix} x_0^2 + y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

440. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. **441.** $y^2 - y = 0$.

442. $y = x^3 - 1$.

443. $\begin{vmatrix} y & x^n & x^{n-1} & \dots & x^2 & x & 1 \\ y_0 & x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{vmatrix} = 0.$

444. Atunci şi numai atunci cînd $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

445. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$.

446. Atunci şi numai atunci cînd rangul matricei

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$$

este mai mic decît trei.

447. Atunci şi numai atunci cînd rangul matricei

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

este mai mic decît trei.

448. Sînt coplanare, atunci şi numai atunci cînd rangul matricei

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{pmatrix}$$

este mai mic decît patru și coliniare atunci și numai atunci cînd rangul acestei matrice este mai mic decît trei.

449. Toate planele trec printr-un același punct, atunci și numai atunci cînd rangul matricei

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & B_n & C_n & D_n \end{pmatrix}$$

este mai mic decît patru; prin aceeași dreaptă, atunci și numai atunci cînd rangul matricei este mai mic decît trei.

450. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$

453. Nu. **454.** De exemplu $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **455.** Da.

456. *Soluție.* Fie

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1r} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \dots & \lambda_{rr} \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{r} \lambda_{1s}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{r} \lambda_{1s}\alpha_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{s=1}^{r} \lambda_{rs}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{r} \lambda_{rs}\alpha_{sn} \end{pmatrix}.$$

Se vede direct că liniile matricei BA sînt soluții ale sistemului. In afară de aceasta, întrucît $|B| \neq 0$, $A = B^{-1}(BA)$, adică soluțiile scrise în matricea A sînt combinații liniare ale soluțiilor scrise în matricea BA.

457. *Soluție.* Fie

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn}\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \dots & \gamma_{rn}\end{pmatrix}.$$

Întrucît C reprezintă un sistem fundamental de soluții

$\alpha_{11}=\lambda_{11}\gamma_{11}+\lambda_{12}\gamma_{21}+\dots+\lambda_{1r}\gamma_{r1}$ etc., adică $A=BC$, unde

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \dots & \lambda_{rr}\end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, A reprezintă, de asemenea, un sistem fundamental de soluții și de aceea $|B|\neq 0$.

459. De exemplu

$x_1=c_1+c_2+5c_3$; $x_2=-2c_1-2c_2-6c_3$; $x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=c_3$

(v. răspunsul de la problema 454).

460. $x_1=11c$; $x_2=c$; $x_3=-7c$.

461. Nr. 408. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

Nr. 409. $x_1=3c_1+13c_2$; $x_2=19c_1+20c_2$; $x_3=17c_1$; $x_4=-17c_2$.

Nr. 410. $x_1=c_1+7c_2$; $x_2=-c_1+5c_2$; $x_3=-c_1$; $x_4=2c_2$; $x_5=6c_2$.

Nr. 412. $x_1=c_1+7c_2$; $x_2=c_1+5c_2$; $x_3=-c_1-5c_2$; $x_4=-2c_1$; $x_5=8c_2$.

Nr. 413. $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=c$; $x_5=c$.

462. $x_1=-16+c_1+c_2+5c_3$;

$x_2=23-2c_1-2c_2-6c_3$;

$x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=c_3$.

463. Nr. 406. $x_1=-8$; $x_2=3+c$; $x_3=6+2c$; $x_4=c$.

Nr. 414. $x_1=c_3$; $x_2=2+c_1+c_2-5c_3$; $x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=-1+3c_3$.

Nr. 415. $x_1=1+2c_3$; $x_2=1+c_1-c_2+5c_3$; $x_3=2c_1$; $x_4=2c_2$; $x_5=1+6c_3$.

CAPITOLUL IV

MATRICE

464. a) $\begin{pmatrix} 3, & -1 \\ 5, & -1 \end{pmatrix}$; b $\begin{pmatrix} -9, & 13 \\ 15, & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 6, & 2, & -1 \\ 6, & 1, & 1 \\ 8, & -1, & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1, & 9, & 15 \\ -5, & 5, & 9 \\ 12, & 26, & 32 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} a+b+c, & a^2+b^2+c^2, & b^2+2ac \\ a+b+c, & b^2+2ac, & a^2+b^2+c^2 \\ 3, & a+b+c, & a+b+c \end{pmatrix}$.

465. a) $\begin{pmatrix} 7, & 4, & 4 \\ 9, & 4, & 3 \\ 3, & 3, & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 15, & 20 \\ 20, & 35 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3, & -2 \\ 4, & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1, & n \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi, & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi, & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

466. $\begin{pmatrix} 1, & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n}, & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}$, unde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{n}$.

Prin urmare

$$\begin{pmatrix} 1, & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n}, & 1 \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\varphi, & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi, & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

Limita primului factor este egală cu 1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\varphi = \alpha \lim\limits_{\varphi\to 0} \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = \alpha$.

De aceea

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1, & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n}, & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

467. a) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$;
b) $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$.

c) Se demonstrează prin inducție.

468. a) $\begin{pmatrix} -10, & -4, & -7 \\ 6, & 14, & 4 \\ -7, & 5, & -4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$.

469. a) $\begin{pmatrix} x, & 2y \\ -y, & x-2y \end{pmatrix} = (x-y)E+yA$;

b) $\begin{pmatrix} x, & y \\ 0, & x \end{pmatrix} = (x-y)\ E+yA$;

c) $\begin{pmatrix} x, & y, & 0 \\ u, & v, & 0 \\ 3t-3x-u, & t-3y-v, & t \end{pmatrix}$,

470. a) $\begin{pmatrix} 5, & 1, & 3 \\ 8, & 0, & 3 \\ -2, & 1, & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$,

471. Se verifică prin calcul direct.

472. Există polinoame $F(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$, pentru care $F(A)=0$, deoarece egalitatea $F(A)=a_0E+a_1A+\ldots+a_mA^m=0$ este echivalentă cu un sistem de n^2 ecuații liniare omogene cu $m+1$ necunoscute $a_0, a_1, \ldots, a_m$, care, pentru $m \geqslant n^2$, admite cu siguranță soluții nebanale. Să presupunem că $F(x)$ este un polinom oarecare, pentru care $F(A)=0$, iar $f(x)$ este polinomul de gradul cel mai mic dintre polinoamele cu această proprietate. Atunci, $F(x)=f(x)q(x)+r(x)$, în care $r(x)$ este un polinom de grad mai mic decît $f(x)$. Avem: $r(A)=F(A)-f(A)q(A)=0$ și, prin urmare, $r(x)=0$, căci altfel $f(x)$ nu ar mai fi polinomul de gradul cel mai mic, conform ipotezei. Așadar, $F(x)=f(x)q(x)$.

473. Fie

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

Atunci, suma elementelor de pe diagonala matricei AB este egală cu $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{ik}$; exact aceeaşi valoare are şi suma elementelor de pe diagonala matricei BA. Prin urmare, suma elementelor de pe diagonala matricei $AB-BA$ este egală cu zero, şi egalitatea $AB-BA=E$ este imposibilă.

Observaţie. Rezultatul nu mai este valabil pentru matricele cu elemente dintr-un corp cu caracteristică $p\neq 0$. In adevăr, într un corp cu caracteristică p, pentru matricele de ordinul p :

$$A=\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, \ldots & 0\\ 0, & 0, & 1, \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0, & 0, & 0, & 1\\ 0, & 0, & 0, \ldots & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, \ldots, & 0\\ 1, & 0, & 0, \ldots, & 0\\ 0, & 2, & 0, \ldots, & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0, & 0, & 0, \ldots, p-1, & 0\end{pmatrix}$$

avem : $AB-BA=E$.

474. $(E-A)(E+A+A^2+\ldots+A^{k-1})=E-A^k=E$.

475. $\begin{pmatrix} a, & b\\ c, & -a,\end{pmatrix}$, $bc=-a^2$.

476. Dacă $A^3=0$, atunci $A^2=0$. In adevăr, dacă $A^3=0$, atunci $|A|=0$. Prin urmare (v. 471), $A^2=(a+d)A$, $0=A^3=(a+d)A^2=(a+d)^2A$, de unde $a+d=0$ şi $A^2=0$.

477. $\pm E$; $\begin{pmatrix} a, & b\\ c, & -a\end{pmatrix}$, $a^2=1-bc$.

478. Dacă $A=0$, atunci X poate fi orice matrice. Dacă $|A|\neq 0$, atunci $X=0$. In sfîrşit dacă $|A|=0$, însă $A\neq 0$, liniile matricei A sînt proporţionale. Fie $\alpha:\beta$ raportul elementelor corespunzătoare de pe liniile întîi şi a doua ale matricei A. Atunci $X=\begin{pmatrix} -\beta x, & \alpha x\\ -\beta y, & \alpha y\end{pmatrix}$ pentru orice x, y.

479. Fie $A=\begin{pmatrix} a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}$.

I. Dacă $A\neq 0$, însă $a+d=0$, $ad-bc=0$, atunci nu există soluţii.

II. Dacă $a+d\neq 0$, $(a-d)^2+4bc=0$, $(a-d)$, b, c nefiind în acelaşi timp nule, atunci există două soluţii

$$X=\pm\frac{1}{2\sqrt{2(a+d)}}\cdot\begin{pmatrix} 3a+d, & 2b\\ 2c, & a+3d\end{pmatrix}.$$

III. Dacă $a+d\neq 0$, $ad-bc=0$, atunci există două soluții

$$X=\pm\frac{1}{\sqrt{a+d}}\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}.$$

IV. Dacă $ad-bc\neq 0$, $(a-d)^2+4bc\neq 0$, atunci există patru soluții

$$X=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}\frac{\lambda^2+a-d}{2}, & b\\ c, & \frac{\lambda^2-a+d}{2}\end{pmatrix}, \text{ unde } \lambda=\pm\sqrt{a+d\pm 2\sqrt{ad-bc}}.$$

V. Dacă $a-d=b=c=0$, atunci există o infinitate de soluții: $X=\pm\sqrt{a}E$ și $X=\begin{pmatrix}x, & y\\ z, & -x\end{pmatrix}$, unde x, y, z sînt legate prin relația $x^2+yz=a$.

480. a) $\begin{pmatrix}5, & -2\\ -2, & 1\end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d, & -b\\ -c, & a\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1, & -2, & 7\\ 0, & 1, & -2\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}1, & -3, & 11, & -38\\ 0, & 1, & -2, & 7\\ 0, & 0, & 1, & -2\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix}1, & -4, & -3\\ 1, & -5, & -3\\ -1, & 6, & 4\end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1, & 1, & 1, & 1\\ 1, & 1, & -1, & -1\\ 1, & -1, & 1, & -1\\ 1, & -1, & -1, & 1\end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix}2, & -1, & 0, & 0\\ -3, & 2, & 0, & 0\\ 31, & -19, & 3, & -4\\ -23, & 14, & -2, & 3\end{pmatrix}$;

h) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix}2-n, & 1, & 1, & \ldots, & 1\\ 1, & 2-n, & 1, & \ldots, & 1\\ 1, & 1, & 2-n, & \ldots, & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1, & 1, & 1, & \ldots, & 2-n\end{pmatrix}$;

i) $\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & \varepsilon^{-1}, & \varepsilon^{-2}, & \ldots, & \varepsilon^{-n+1} \\ 1, & \varepsilon^{-2}, & \varepsilon^{-4}, & \ldots, & \varepsilon^{-2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \varepsilon^{-n+1}, & \varepsilon^{-2n+2}, & \ldots, & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$;

j) $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1\cdot n, & 1\cdot(n-1), & 1\cdot(n-2), & \ldots, & 1\cdot 1 \\ 1\cdot(n-1), & 2\cdot(n-1), & 2\cdot(n-2), & \ldots, & 2\cdot 1 \\ 1\cdot(n-2), & 2\cdot(n-2), & 3\cdot(n-2), & \ldots, & 3\cdot 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1\cdot 1, & 2\cdot 1, & 3\cdot 1, & \ldots, & n\cdot 1 \end{pmatrix}$;

k) $\frac{1}{2n^3}\begin{pmatrix} 2-n^2, & 2+n^2, & 2, & \ldots, & 2, \\ 2. & 2-n^2, & 2+n^2, & \ldots, & 2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2+n^2, & 2, & 2, & \ldots, & 2-n^2 \end{pmatrix}$;

l) $\frac{1}{d}\begin{pmatrix} b_1c_1+d, & b_2c_1, & \ldots, & b_nc_1, & -c_1 \\ b_1c_2, & b_2c_2+d. & \ldots, & b_nc_2, & -c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1c_n, & b_2c_n, & \ldots, & b_nc_n+d, & -c_n \\ -b_1, & -b_2, & \ldots, & -b_n, & 1 \end{pmatrix}$,

unde $d=a-b_1c_1-b_2c_2-\ldots-b_nc_n$,

m) $\frac{1}{f}\begin{pmatrix} f-f_0x^n, & xf-f_1x^n, & \ldots, & x^{n-1}f-f_{n-1}x^n, & x^n \\ -f_0x^{n-1}, & f-f_1x^{n-1}, & \ldots, & x^{n-2}f-f_{n-1}x^{n-1}, & x^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -f_0x, & -f_1x, & \ldots, & f-f_{r-1}x, & x \\ -f_0, & -f_1, & \ldots, & -f_{n-1}, & 1 \end{pmatrix}$,

unde $f_0=a_0$, $f_1=a_0x+a_1$, $\ldots$, $f_{n-1}=a_0x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}$, $f=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$;

n) $\begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \lambda_1^2, & \lambda_1\lambda_2, & \ldots, & \lambda_1\lambda_n \\ \lambda_2\lambda_1, & \lambda_2^2, & \ldots, & \lambda_2\lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n\lambda_1, & \lambda_n\lambda_2, & \ldots, & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$,

unde $\mu=1+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$;

o) $\begin{pmatrix} B^{-1}+\lambda B^{-1}UVB^{-1}, & -\lambda B^{-1}U \\ -\lambda VB^{-1}, & \lambda \end{pmatrix}$, unde $\lambda=\frac{1}{a-VB^{-1}U}$.

481. a) $\begin{pmatrix} 2, & -23 \\ 0, & 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3, & 2, & 0 \\ -4, & 5, & -2 \\ -5, & 3, & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & -1, & -1, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & -1, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 24, & 13 \\ -34, & -18 \end{pmatrix}$; e) $X=E-\frac{n-1}{n^2}\begin{pmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & \ldots, & 1 \end{pmatrix}$;

f) $X=\begin{pmatrix} 1+a, & b \\ -2a, & 1-2b \end{pmatrix}$; g) Nu există nici o matrice X.

482. Este suficient să înmulţim egalitatea $AB=BA$ cu A^{-1}, la stînga şi la dreapta

483. $\begin{pmatrix} -1, & -1 \\ -1, & -1 \end{pmatrix}$.

484. Dacă $A^3=E$, atunci $|A|^3=1$ şi, în virtutea faptului că sîntem în real, $|A|=1$. Să punem $A=\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$. Atunci, egalînd pe A^{-1}, cu A^2, obţinem uşor $A=E$ sau $a+d=-1$, $ad-bc=1$.

485. $A=\pm E$ sau $A=\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & -a \end{pmatrix}$, şi $a^2+bc=\pm 1$.

486. $\begin{pmatrix} a, & b \\ -b, & a \end{pmatrix}=aE+bI$, unde $I=\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$.

Atunci $I^2=-E$ şi, prin urmare, corespondenţa $aE+bI\to a+bi$ este un izomorfism.

487. Să punem $\begin{pmatrix} a+bi, & c+di \\ -c+di, & a-bi \end{pmatrix}=aE+bI+cJ+dK$, unde

$I=\begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0, & i \\ i, & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $I^2=J^2=K^2=-E$, $IJ=-JI=K$, $JK=-KJ=I$, $KI=-IK=J$.

De aici rezultă că produsul a două matrice de forma $a+bI+cJ+dK$ este o matrice de aceeaşi formă. Acelaşi lucru este valabil şi pentru sumă şi diferenţă, astfel încît mulţimea de matrice considerată formează un inel.

Mai departe, $|A|=\begin{vmatrix} a+bi, & c+di \\ -c+di, & a-bi \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$, de îndată ce $A\neq 0$. Prin urmare, orice matrice, diferită de zero, are o inversă şi din egalitatea $A_1A_2=0$ (sau $A_2A_1=0$), pentru $A_1\neq 0$, rezultă $A_2=0$.

Inelul de matrice considerat realizează aşa numita algebră a cuaternionilor.

488. Cu notaţia din problema 487, avem

$(a_1E+b_1I+c_1J+d_1K)(a_2E+b_2I+c_2J+d_2K)=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)E+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)I+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)J+(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)K.$

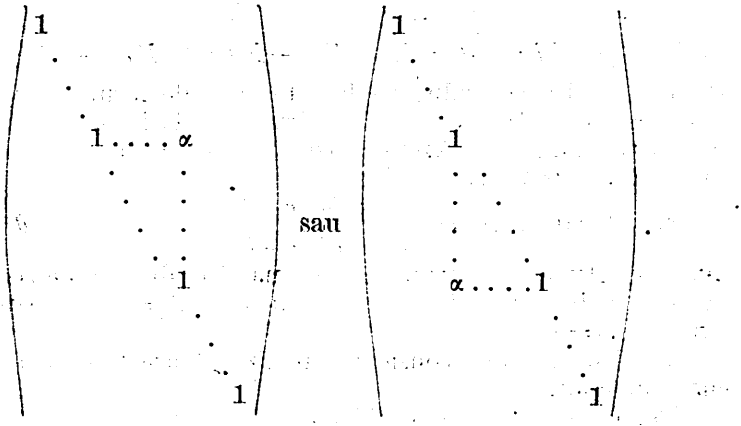
Trecînd la determinanţi, obţinem

$(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)^2+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)^2+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)^2+(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)^2.$

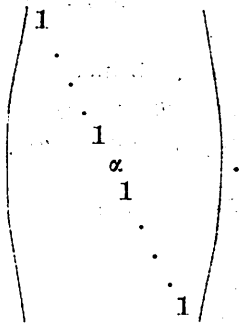
489. Permutarea a două linii ale matricei se realizează prin înmulţire la stînga cu matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Operaţia b se realizează prin înmulţire la stînga cu matricea



Operaţia c se realizează prin înmulţire la stînga cu matricea



Operaţiile $a, b, c,$ pentru coloane, se realizează prin înmulţire la dreapta cu aceleaşi matrice.

490. După cum se ştie, orice matrice A poate fi adusă la forma diagonală R prin transformările elementare $a, b, c,$ efectuate asupra liniilor şi coloanelor. De aceea, pentru o matrice dată A se va găsi o matrice de forma R, astfel încît $R = U_1 U_2 \ldots U_m A V_1 V_2 \ldots V_k$, unde $U_1, \ldots, U_m, V_1, V_2, \ldots, V_k$ sînt matricele transformărilor elementare. Toate sînt matrice nesingulare şi au inverse.

Prin urmare, $A = PRQ$, unde P şi Q sînt matrice nesingulare.

491. În virtutea rezultatelor problemelor 489, 490, este suficient să demonstrăm teorema pentru matricele diagonale şi

pentru matricele care corespund operației a, deoarece matricele care corespund operației b au forma cerută. Se vede ușor că operația a se reduce la operațiile b și c. In adevăr, pentru a transpune două linii, putem aduna prima dintre ele la a doua, scăzînd apoi a doua din prima. După aceea adăugăm prima linie la a doua și, în sfîrșit, înmulțim prima linie cu -1. Acest fapt este echivalent cu identitatea matricială $E - e_{ii} - e_{kk} + e_{ik} + e_{ki} = (E - 2e_{kk})(E+e_{ik})\ (E-e_{ki})\ (E+e_{ik})$.

Pentru matricele diagonale teorema este evidentă

$$a_1e_{11}+a_2e_{22}+\ldots+a_ne_{nn}= \\ =(E+(a_1-1)e_{11})\ (E+(a_2-1)e_{22})\ldots(E+(a_n-1)e_{nn}).$$

492. Fie $A=P_1R_1Q_1$, $B=P_2\ R_2\ Q_2$, unde P_1, Q_1, P_2, Q_2 sînt matrice nesingulare, iar R_1 și R_2 sînt matrice care au, respectiv, r_1 și r_2 unități pe diagonala principală, iar celelalte elemente egale cu 0. Atunci $AB= P_1R_1Q_1P_2R_2Q_2$, și rangul lui AB este egal cu rangul lui R_1CR_2, unde $C=Q_1P_2$ este o matrice nesingulară. Matricea R_1CR_2 se obține din matricea C prin înlocuirea tuturor elementelor ultimelor $n-r_1$ linii și $n-r_2$ coloane prin zero. Intrucît înlăturarea unei linii sau a unei coloane reduce rangul unei matrice cu cel mult o unitate, rangul matricei $R_1\ CR_2$ nu este mai mic decît $n-(n-r_1)-(n-r_2)=r_1+r_2-n$.

493. Rezultă imediat din proporționalitatea tuturor liniilor unei matrice de rangul 1.

494. Pe baza rezultatului problemei 492, rangul matricei căutate A este 1 sau 0. Prin urmare

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1, & \lambda_1\mu_2, & \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_2\mu_1, & \lambda_2\mu_2, & \lambda_2\mu_3 \\ \lambda_3\mu_1, & \lambda_3\mu_2, & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix}.$$

Calculul direct ne dă

$$0=A^2=(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3)A,$$

de unde rezultă

$$\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=0.$$

495. Să presupunem că A dă o soluție a problemei, diferită de soluția banală $A=\pm E$. Atunci, una dintre matricele $A-E$ sau $A+E$ are rangul 1. Fie

$$A+E=\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1, & \lambda_1\mu_2, & \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_2\mu_1, & \lambda_2\mu_2, & \lambda_2\mu_3 \\ \lambda_3\mu_1, & \lambda_3\mu_2, & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix} = B.$$

Atunci $A^2 = E - 2B + B^2 = E + (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 - 2)\,B$, de unde rezultă că pentru $A^2 = E$ este necesar și suficient să fie îndeplinită condiția $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 2$.

În mod analog, se examinează și cazul al doilea.

496. Să presupunem că la matricea (A, B), unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \\ \dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mk} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}, \dots b_{1s} \\ \dots\dots \\ b_{m1}, \dots b_{ms} \end{pmatrix},$$

se adaugă o coloană $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$, a cărei adăugare la matricea B nu îi mărește rangul. Atunci, sistemul de ecuații liniare

$$b_{11}y_1 + \dots + b_{1s}y_s = c_1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$b_{m1}y_1 + \dots + b_{ms}y_s = c_m$$

este compatibil. Odată cu el este, compatibil, însă, și sistemul

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + b_{11}y_1 + \dots + b_{1s}y_s = c_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mk}x_k + b_{m1}y_1 + \dots + b_{ms}y_s = c_m.$$

Prin urmare, rangul matricei (A, B) este egal cu rangul matricei (A, B, C).

Să presupunem acum că coloanele matricei B se adaugă cîte una la matricea A. Prin aceasta, în virtutea celor demonstrate, rangul lui A poate să crească cu 1 numai atunci cînd crește rangul lui B. Prin urmare, rang $(A, B) \leqslant$ rang A + + rang B.

497. Fie rang $(E + A) = r_1$, rang $(E - A) = r_2$. Deoarece $(E + A) + (E - A) = 2E$, $r_1 + r_2 \geqslant n$. Pe de altă parte, $(E + A)(E - A) = 0$ și de aceea $0 \geqslant r_1 + r_2 - n$. Prin urmare, $r_1 + r_2 = n$.

498. Rangul matricei $(E + A, E - A)$ este egal cu n. Să alegem din această matrice matricea nesingulară pătrată P, de ordinul n. Presupunem că primele ei r coloane aparțin matricei $E + A$, iar restul de $n - r$ coloane aparțin lui $E - A$.

Atunci, în virtutea egalității $(E + A)(E - A) = 0$, avem

$$(E+A)\,P = \begin{pmatrix} q_{11}, \ldots q_{1r}, 0, \ldots, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n1}, \ldots q_{nr}, 0, \ldots, 0 \end{pmatrix}.$$

$$(E-A)\,P = \begin{pmatrix} 0, \ldots, 0, q_{1r+1}, \ldots, q_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, \ldots, 0, q_{nr+1}, \ldots, q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Adunînd aceste egalități, obținem

$$2P = \begin{pmatrix} q_{11} \ldots q_{1r}, q_{1r+1} \ldots q_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n1} \ldots q_{nr}, q_{nr+1} \ldots q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Scăzîndu-le, obținem

$$2AP = \begin{pmatrix} q_{11} \ldots q_{1r}, -q_{1r+1} \ldots -q_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n1} \ldots q_{nr}, -q_{nr+1} \ldots -q_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= 2P \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

De aci rezultă imediat ceea ce trebuia demonstrat.

499. Dacă $AA^{-1} = E$ și ambele matrice au elemente întregi, atunci $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$, de unde rezultă că $A = \pm 1$, deoarece $|A|$ și $|A^{-1}|$ sînt numere întregi. Evident, condiția $|A| = \pm 1$ este și suficientă pentru ca matricea A^{-1} să aibă elemente întregi.

500. Fie A o matrice nesingulară cu elemente întregi. Printre elementele primei ei coloane se vor găsi elemente diferite de zero. Prin înmulțirea unor linii ale matricei A cu -1 putem

face că toate elementele primei coloane să devină mai mari sau egale cu zero. Să alegem dintre acestea elementul pozitiv cel mai mic și să scădem linia corespunzătoare dintr-o altă linie, care conține un element pozitiv în prima coloană. Obținem din nou o matrice cu elemente pozitive sau nule în prima coloană, însă, unul dintre aceste elemente va fi mai mic decît la matricea inițială. Continuăm acest proces atîta timp cît este posibil. După un număr finit de operații vom ajunge la o matrice în care toate elementele primei coloane vor fi nule, cu excepția unui singur element pozitiv. Atunci, prin schimbarea locurilor a două linii, vom aduce în prima linie elementul diferit de zero din prima coloană. Apoi, lăsînd neatinsă prima linie, vom aplica aceleași operații pentru a face ca în coloana a doua să se găsească pe diagonală un element pozitiv, iar toate elementele de sub el să fie nule. Trecem apoi la coloana a treia etc. În cele din urmă, matricea va fi adusă la forma triunghiulară. Atunci, adunînd sau scăzînd de un număr convenabil de ori fiecare linie din cele de deasupra ei, putem face ca elementele situate deasupra diagonalei principale să verifice condițiile puse.

Toate operațiile amintite sînt echivalente cu înmulțiri la stînga cu matrice unimodulare, de unde rezultă direct rezultatul cerut.

501. Fie $A = P_1R_1 = P_2R_2$, unde matricele P_1, R_1 și P_2, R_2 satisfac condițiile problemei 500. Atunci, din egalitatea $P_2^{-1}P_1 = R_2R_1^{-1}$ rezultă că matricea unimodulară cu elemente întregi $C = P_2^{-1}P_1$ are de asemenea, forma triunghiulară.

Fie

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

În acest caz, din egalitatea $R_2 = CR_1$ deducem, în primul rînd, că $b_{11} = c_{11}a_{11}$, ..., $b_{nn} = a_{nn}c_{nn}$, de unde rezultă că toți

c_{ii} sînt pozitivi. Cum însă, $c_{11}c_{22} \dots c_{nn} = |C| = \pm 1$, avem $c_{11} = c_{22} = \dots = c_{nn} = 1$ şi $a_{ii} = b_{ii}$.

Mai departe, $b_{12} = c_{11}a_{12} + c_{12}a_{22} = a_{12} + c_{12}a_{22}$, de unde $c_{12} = \frac{b_{12} - a_{12}}{a_{22}}$. Insă, $0 \leqslant b_{12} < b_{22} = a_{22}$, $0 \leqslant a_{12} < a_{22}$ şi, prin urmare, $|c_{12}| < 1$ şi, deci, $c_{12} = 0$. Tot astfel, comparînd succesiv (după coloane) celelalte elemente din egalitatea de matrice $CR_1 = R_2$, ajungem la concluzia că toţi $c_{ik} = 0$ pentru $k > i$, adică $C = E$ şi, prin urmare, $R_1 = R_2$, $P_1 = P_2$. Aşadar, în fiecare clasă se va găsi o matrice de forma R şi numai una singură.

Numărul matricelor R, cu elemente date $d_1, d_2, \dots, d_n$ pe diagonală, este evident egal cu $d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1}$ şi, prin urmare, numărul matricelor R cu un determinant k dat este egal cu $F_n(k) = \sum d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1}$, unde semnul $\sum$ se extinde la toate numerele pozitive $d_1, d_2, \dots, d_n$ care satisfac condiţia $d_1d_2 \dots d_n = k$. Dacă $k = ab$; $(a, b) = 1$, atunci fiecare factor d_i din egalitatea $k = d_1d_2 \dots d_n$ se descompune în mod natural în doi factori: α_i, β_i, astfel încît $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = a$, $\beta_1\beta_2 \dots \beta_n = b$. Prin urmare,

$$F_n(k) = \sum_{d_1d_2 \dots d_n = k} d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = a \\ \beta_1\beta_2 \dots \beta_n = b}} \alpha_2\alpha_3^2 \dots \alpha_n^{n-1}\beta_2\beta_3^2 \dots \beta_n^{n-1} =$$

$$= \sum_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = a} \alpha_2\alpha_3^2 \dots \alpha_n^{n-1} \cdot \sum_{\beta_1\beta_2 \dots \beta_n = b} \beta_2\beta_3^2 \dots \beta_n^{n-1} = F_n(a) \cdot F_n(b).$$

De aci rezultă că dacă $k = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$ este descompunerea canonică a lui k în factori primi, atunci $F_n(k) = F_n(p_1^{m_1}) \dots F_n(p_s^{m_s})$.

Mai rămîne să evaluăm $F_n(p^m)$. În acest scop împărţim suma pentru calculul lui $F_n(p^m)$ în două părţi. În prima parte $d_n = 1$, iar în a doua parte, d_n este divizibil cu p, $d_n = pd'_n$. Obţinem, astfel, formula $F_n(p^m) = F_{n-1}(p^m) + p^{n-1}F_n(p^{m-1})$, din care se stabileşte uşor prin inducţie completă că

$$F_n(p^m) = \frac{(p^{m+1} - 1)(p^{m+2} - 1) \dots (p^{m+n-1} - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1) \dots (p^{n-1} - 1)}.$$

502. Luăm elementul diferit de zero, cel mai mic în valoare absolută, al matricei şi îl transportăm în colţul de sus din

stînga, prin schimbarea locurilor liniilor și ale coloanelor. Apoi, adunăm sau scădem de atîtea ori prima linie și prima coloană din toate celelalte linii și coloane pînă cînd toate elementele primei linii și ale primei coloane devin mai mici în valoare absolută decît elementul din colț. Apoi, repetăm acest proces. El se va termina după un număr finit de operații, deoarece, după fiecare operație, în colțul de sus din stînga rămîne un element mai mic în valoare absolută decît cel precedent. Însă, procesul se poate termina numai dacă toate elementele primei linii și ale primei coloane vor fi egale cu zero, cu excepția celui din colț. După aceasta, transformăm, în același mod, matricea formată din celelalte linii și coloane, înafară de prima linie și de prima coloană. În cele din urmă matricea se aduce la forma diagonală. În virtutea rezultatului problemei 489, toate transformările descrise sînt echivalente cu înmulțiri la dreapta și la stînga cu matrice unimodulare.

503. Înmulțirea la stînga cu matricea A^m este echivalentă cu adunarea la prima linie a liniei a doua înmulțită cu m. Înmulțirea la dreapta cu B^m este echivalentă cu adunarea la linia a doua a primei linii înmulțită cu m.

Fie $U = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ matricea dată, cu elemente întregi și cu determinantul 1. Să facem împărțirea cu rest a lui a prin c: $a = mc + a_1$, $0 \leqslant a_1 < |c|$; apoi, împărțim pe c cu a_1: $c = m_1 a_1 + c_2$, $0 \leqslant c_2 < a_1$ etc. pînă ce împărțirea se face fără rest. Atunci $A^{-m} U = U_1 = \begin{pmatrix} a_1, & b_1 \\ c, & d \end{pmatrix}$, $B^{-m_1} U_1 = U_2 = \begin{pmatrix} a_1, & b_1 \\ c_2, & d_2 \end{pmatrix}$ etc. În cele din urmă vom ajunge la matricea U_{k+1} de forma $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ 0, & d_{k+1} \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} 0, & b_{k+1} \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$. În virtutea faptului că toți a_k, c_k sînt pozitivi și că U_{k+1} este unimodulară, în primul caz vom avea $a_k = d_{k+1} = 1$, iar în al doilea caz, $c_k = -b_{k+1} = 1$. Astfel, în primul caz $U_{k+1} = \begin{pmatrix} 1, & b_k \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = A^{b_k}$ și în al doilea caz $U_{k+1} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & d_k \end{pmatrix} = A^{-1} R A^{d_k - 1}$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

504. O matrice cu determinantul -1 se transformă într-o matrice cu determinantul 1, prin înmulțire cu C. Orice matrice

cu determinantul 1 este un produs de puteri ale lui A și B, iar B este egal cu CAC.

505. Fie $|A| = 1$, $A^2 = E$, $A \neq E$. Atunci (v. problema 498)

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

cu o matrice nesingulară P. Să determinăm matricea P, astfel încît ea să aibă elemente întregi și determinantul cel mai mic posibil. Deoarece $A + E = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, matricea $A + E$ are rangul 1 și, prin urmare,

$$A + E = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1, & \lambda_1\mu_2, & \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_2\mu_1, & \lambda_2\mu_2, & \lambda_2\mu_3 \\ \lambda_3\mu_1, & \lambda_3\mu_2, & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix},$$

iar $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 2$ (problema 195). Întrucît matricea $A + E$ are elemente întregi, numerele λ_1, λ_2, λ_3 și μ_1, μ_2, μ_3 pot fi considerate întregi.

Formînd sistemul de ecuații pentru componentele matricei P, se constată ușor că se poate lua pentru P matricea

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & -\delta \\ \lambda_2, & \frac{\mu_3}{\delta}, & u\mu_1 \\ \lambda_3, & \frac{\mu_2}{\delta}, & v\mu_1 \end{pmatrix}$$

unde δ este cel mai mare divizor comun al lui μ_2, μ_3, iar u, v sînt numere întregi, astfel încît $u\mu_2 + v\mu_3 = \delta$.

Determinantul matricei P este egal cu 2.

Pe baza rezultatului problemei 500, $P = QR$, unde Q este o matrice unimodulară, iar R este una dintre cele șapte matrice triunghiulare posibile cu determinantul 2.

Prin urmare, $Q^{-1}AQ$ este egală cu una dintre cele șapte matrice $R \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} R^{-1}$. Printre aceste matrice există numai

trei distincte, iar două dintre ele se permută între ele printr-o transformare, prin intermediul unei matrice unimodulare. Rămîn astfel numai cele două matrice indicate în enunțul problemei.

506. a) $\begin{pmatrix} 9, & 3 \\ 10, & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2, & 4, & 6 \\ 1, & 2, & 3 \\ 3, & 6, & 9 \end{pmatrix}$; d) 13.

507. 45.

508. Se obține identitatea lui Lagrange

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 + \\ + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2.$$

509. Minorul de ordinul m, format de elementele liniilor cu numerele $i_1, i_2, \ldots, i_m$ și ale coloanelor cu numerele $k_1, k_2, \ldots, k_m$, este determinantul produsului dintre matricea formată din liniile $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ale primului factor și matricea formată din coloanele $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ale celui de al doilea factor. De aceea, el este egal cu suma produselor tuturor minorilor de ordinul m, formați din liniile $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ale primei matrice, cu minorii corespunzători, formați din coloanele $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ale matricei a doua.

510. Un minor diagonal al matricei $\overline{A}A$ este egal cu suma pătratelor tuturor minorilor de același ordin ai matricei A, formați din elementele coloanelor care au aceleași numere ca și coloanele matricei $\overline{A}A$ care conțin minorul considerat. Prin urmare, el nu poate fi negativ.

511. Dacă toți minorii principali de ordinul k ai matricii $\overline{A}A$ sînt egali cu zero, atunci, în virtutea rezultatului problemei 510, toți minorii de ordinul k ai matricei A sînt egali cu zero. Prin urmare, rangul matricei A și, odată cu el, rangul matricei $\overline{A}A$ este mai mic decît k.

512. Suma tuturor minorilor diagonali de ordinul k ai matricei $\overline{A}A$ este egală cu suma pătratelor tuturor minorilor de ordinul k ai matricei A. Cu același număr este egală și suma tuturor minorilor diagonali de ordinul k ai matricei $A\overline{A}$.

513. Se obține aplicînd teorema referitoare la determinantul produsului a două matrice, la produsul dintre matricea $\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ b_1, b_2, \ldots, b_n \end{pmatrix}$ și matricea transpusă.

514. Se obține aplicînd teorema referitoare la determinantul produsului matricelor

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \\ \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n \end{pmatrix}.$$

515. Rezultă direct din identitatea din problema 513. Egalitatea este posibilă numai atunci cînd rangul matricei $\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots & a_n \\ b_1, & b_2, & \ldots & b_n \end{pmatrix}$ este mai mic decît 2, adică numai atunci cînd numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt proporționale.

516. Rezultă direct din identitatea din problema 514. Egalitatea este posibilă numai atunci cînd numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt proporționale.

517. Să presupunem că matricea B are m coloane, iar matricea C are k coloane. După teorema lui Laplace $|A| = \sum B_i C_i$, unde B_i sînt toți determinanții de ordinul m formați din matricea B, iar C_i sînt complemenții lor algebrici, care, abstracție făcînd de semn, sînt egali cu determinanții de ordinul k, formați din matricea C. În virtutea inegalității lui Buniakovski (problema 515) $|A|^2 \leqslant \sum B_i^2 \cdot \sum C_i^2$. Dar $\sum B_i^2 = |\overline{B}B|$, $\sum C_i^2 = |\overline{C}C|$.

518. Fie

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}, & \ldots, & b_{nm} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11}, & \ldots & c_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & \ldots, & c_{nk} \end{pmatrix}; \quad A = (B, C).$$

Inegalitatea demonstrată este banală, dacă $m + k \geqslant n$; ea a fost stabilită în problema 517, pentru $m + k = n$. Ne rămîne să considerăm cazul $m + k < n$. Să presupunem în primul rînd că $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} c_{is} = 0$ pentru toți j, s. Atunci

$$\overline{A}A = \begin{pmatrix} \overline{B}B, & 0 \\ 0, & \overline{C}C \end{pmatrix} \text{ și prin urmare, } |\overline{A}A| = |\overline{B}B| \cdot |\overline{C}C|.$$

În cazul general, este suficient să rezolvăm problema în ipoteza că rangul matricei A este egal cu $m + k$, deoarece în cazul contrar, inegalitatea este banală.

Să completăm matricea A pînă la matricea pătrată (A, D), astfel încît rangul matricei D să fie egal cu $n - m + k$, iar sumele produselor elementelor oricărei coloane a matricei D cu elementele oricărei coloane a matricei A să fie egală cu zero. Acest lucru se poate face, de exemplu, astfel: întîi completăm matricea A pînă la matricea pătrată nesingulară $\varepsilon' = (A, D')$, ceea ce este evident posibil; apoi, înlocuim toate elementele matricei D' prin complementii lor algebrici din $|\varepsilon'|$. Rangul matricei D astfel construite va fi egal cu numărul coloanelor ei, adică cu $n - m - k$, deoarece D este o parte din matricea formată din complementii algebrici ai matricei ε', care diferă de matricea nesingulară $(\varepsilon')^{-1}$ numai prin factorul $|\varepsilon'|$.

Să notăm matricea (A, D) cu P și matricea (C, D) cu Q. Atunci, pe baza rezultatului problemei 517, $|\overline{P}P| \leqslant |\overline{B}B| \cdot |\overline{Q}Q|$. Însă, $|\overline{P}P| = |\overline{A}A| \cdot |\overline{D}D|$ și $|\overline{Q}Q| = |\overline{C}C| \cdot |\overline{D}D|$, întrucît $|\overline{D}D| > 0$, rezultă de aici că

$$|\overline{A}A| \leqslant |\overline{B}B| \cdot |\overline{C}C|.$$

519. Reiese imediat din rezultatul problemei 518, aplicat la matricea $\overline{A}$.

520. Determinantul A^*A este suma pătratelor modulelor tuturor minorilor de ordinul m ai matricei A, în care m este numărul coloanelor acesteia.

521. Soluția este analogă soluțiilor problemelor 517, 518. Pentru o matrice pătrată, problema se rezolvă prin aplicarea teoremei lui Laplace și a inegalității lui Buniakovski. O matrice dreptunghiulară trebuie completată pînă la una pătrată, astfel încît suma produselor elementelor oricărei coloane a matricei A cu conjugatele elementelor oricărei coloane a matricei de completare să fie egală cu zero.

522. Aplicînd de cîteva ori rezultatul problemei 521 la matricea A, luînd ca matrice B o matrice formată dintr-o singură coloană, obținem

$$|A^*A| = ||A||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2 \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|^2 \ldots \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|^2 \leqslant n^n M^{2n},$$

de unde rezultă

$$||A|| \leqslant n^{\frac{n}{2}} M^n.$$

523. Să completăm determinantul dat Δ pînă la determinantul Δ_1 de ordinul $n + 1$, scriind la stînga o coloană care

are toate elementele egale cu $\frac{M}{2}$, iar deasupra o linie formată din elemente nule. Atunci $\Delta = \frac{2}{M}\Delta_1$. Scădem prima coloană din toate celelalte coloane ale determinantului Δ_1. Obținem un determinant care are toate elementele mai mici, în valoare absolută, decît $\frac{M}{2}$. Folosind rezultatul problemei 522, obținem ceea ce trebuia demonstrat.

524. Marginea superioară $n^{n/2}M^n$ este realizată, de exemplu, pentru modulul determinantului

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & \varepsilon, & \ldots, & \varepsilon^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \varepsilon^{n-1}, & \ldots, & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}, \text{ unde } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

525. Să construim o matrice de ordinul $n = 2^m$ în modul următor: Pornim dela matricea $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}$. Apoi, fiecare element al ei, egal cu 1, îl înlocuim cu matricea $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}$, iar fiecare element egal cu -1 îl înlocuim cu matricea

$$-\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Obținem astfel o matrice de ordinul al patrulea

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Cu aceasta procedăm în același mod, obținînd o matrice de ordinul al optulea etc.

Se vede ușor că pentru matricele astfel construite, sumele produselor elementelor corespunzătoare din două coloane diferite sînt egale cu 0. Prin urmare

$$\overline{A}A = \begin{pmatrix} n, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & n, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & n \end{pmatrix}, \quad |\overline{A}A| = n^n, \quad ||A|| = n^{\frac{n}{2}}.$$

Pentru matricea MA va fi îndeplinită egalitatea

$$||MA|| = M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

526. Să demonstrăm că toate elementele unei matrice al cărei determinant luat în valoare absolută are valoarea maximă, sînt egale cu ± 1. În adevăr, dacă $-1 < a_{ik} < 1$, $\Delta \geqslant 0$ și $A_{ik} > 0$, atunci determinantul se va mări cînd înlocuim pe a_{ik} cu 1; dacă $\Delta \geqslant 0$ și $A_{ik} < 0$, determinantul se va mări cînd înlocuim a_{ik} cu -1. Dacă $\Delta < 0$, creșterea valorii absolute a determinantului se va produce la înlocuirea lui a_{ik} printr-o unitate cu semnul contrar lui A_{ik}. În sfîrșit, dacă $A_{ik} = 0$, valoarea determinantului nu se va schimba dacă înlocuim pe a_{ik} cu 1 sau -1. Fără a restrînge din generalitate, putem considera că toate elementele primei linii și ale primei coloane din determinantul maxim sînt egale cu 1. Putem realiza aceasta prin înmulțirea unor linii și coloane cu -1. Să scădem acum prima linie a determinantului maxim din toate celelalte linii. Determinantul se va reduce, în acest caz, la un determinant de ordinul $n-1$, care are toate elemenetele egale cu 0 sau -2. Acest din urmă determinant este egal cu $2^{n-1}N$, unde N este un număr întreg.

527. 4 pentru $n = 3$; 48 pentru $n = 5$.

528. Pentru o matrice A singulară rezultatul este banal. Să presupunem acum că A este o matrice nesingulară și fie $\overline{A}$ transpusa ei, Δ — determinantul ei, iar A' — reciproca lui A. Atunci $A' = \Delta C \overline{A}^{-1} C$, unde

$$C = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix};$$

aceasta rezultă direct din regula de formare a matricei. De aceea,

$$|A'| = \Delta^{n-1} \text{ și } (A')' = \Delta^{n-1} \cdot C(\overline{A}')^{-1} C = \Delta^{n+1} \cdot \Delta^{-1} A = \Delta^{n-2} A.$$

529. Să presupunem că minorul matricei A', care este reciproca matricei nesingulare A, este format din liniile $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ și coloanele $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$. Fie $i_{m+1} < i_{m+2} < \ldots < i_n$ liniile care nu intră în minor, iar $k_{m+1} < k_{m+2} < \ldots$

$k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ coloanele care nu intră în minor. Să înmulțim minorul cu determinantul Δ al matricei A

$$\Delta \cdot \begin{vmatrix} \Delta_{i_1 k_1}, & \ldots, & \Delta_{i_1 k_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{i_m k_1}, & \ldots, & \Delta_{i_m k_m} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i_1 + \ldots + i_m + k_1 + \ldots + k_m} \Delta \cdot \begin{vmatrix} A_{i_1 k_1} & \ldots & A_{i_n k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{i_1 k_m} & \ldots & A_{i_m k_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{i_1 k_1} \ldots A_{i_m k_1}, & A_{i_{m+1} k_1} \ldots A_{i_n k_1} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \ldots \\ A_{i_1 k_m} \ldots A_{i_m k_m}, & A_{i_{m+1} k_m} \ldots A_{i_n k_m} \\ 1 & \\ \ldots & \\ \cdot 1 & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \ldots & a_{i_1 k_m} & \ldots & a_{i_1 k_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_m k_1} & \ldots & a_{i_m k_m} & \ldots & a_{i_m k_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_n k_1} & \ldots & a_{i_n k_m} & \ldots & a_{i_n k_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & \\ \ldots & \\ \Delta & \\ a_{i_{m+1} k_1} \ldots & a_{i_{m+1} k_{m+1}} \ldots a_{i_{m+1} k_n} \\ \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ a_{i_n k_1} \ldots & a_{i_n k_{m+1}} \ldots a_{i_n k_n} \end{vmatrix} = \Delta_m \cdot \begin{vmatrix} a_{i_{m+1} k_{m+1}} \ldots & a_{i_{m+1} k_n} \\ \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ a_{i_n k_{m+1}} \ldots & a_{i_n k_n} \end{vmatrix},$$

de unde rezultă teeea ce era de demonstrat.

530. Rezultă imediat din teorema referitoare la determinantul produsului a două matrice dreptunghiulare.

531. Rezultă imediat din teorema referitoare la determinantul produsului a două matrice dreptunghiulare.

532. Trebuie să ordonăm combinările lexicografic, adică să considerăm că combinarea de indici $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ precede combinarea de indici $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$, dacă prima diferență diferită de zero din șirul $i_1 - j_1, i_2 - j_2, \ldots$ este negativă.

În acest caz, orice minor al matricei triunghiulare ale cărui coloane au numere de ordine care formează o combinare care precedă combinarea numerelor liniilor, este egal cu zero.

533. În virtutea rezultatelor problemelor 531 și 491, este suficient să demonstrăm, teorema pentru matrice triunghiulare. În virtutea rezultatului problemei 532, pentru o matrice triunghiulară, avem

$$|A'_m| = \prod_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \ldots a_{i_m i_m} = |A|^{C^{m-1}_{n-1}}.$$

534. Proprietățile a și b rezultă direct din definiție. Pentru stabilirea proprietății c este convenabil să notăm elementele produsului kroneckerian, astfel încît ele să nu aibă drept indici numerele de ordine ale perechilor, ci perechile înseși. Fie

$$C = (A' \cdot A'') \times (B' \cdot B''), \quad A' \times B' = G, \quad A'' \times B'' = H$$

Atunci

$$c_{i_1 k_1,\, i_2 k_2} = \sum_{i=1}^{m} a'_{i_1 i} a''_{i i_2} \cdot \sum_{k=1}^{m} b'_{k_1 k} b''_{k k_2} = \sum_{i,\,k} a'_{i_1 i} b'_{k_1 k} a''_{i i_2} b''_{k k_2} =$$

$$= \sum_{i,\,k} g_{i_1 k_1,\, i k} h_{i k,\, i_2 k_2},$$

de unde $C = G \cdot H$, ceea ce era de demonstrat.

535. Determinantul matricei $A \times B$ nu depinde de modul de numerotare al perechilor, deoarece schimbarea numerotării atrage după ea aceleași permutări ale liniilor și ale coloanelor.

Mai departe,

$$A \times B = (A \times E_m) \cdot (E_n \times B).$$

Printr'o numerotare convenabilă a perechilor, matricea $A \times E_m$ se poate aduce la forma $\begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & A \end{pmatrix}$, matricea A repetîndu-se de m ori. Prin urmare, determinantul matricei $A \times E_m$ este egal cu $|A|^m$. În mod analog (însă printr-o altă numerotare a perechilor), se arată că determinantul lui $E_n \times B$ este egal cu $|B|^n$. Prin urmare

$$|A \times B| = |A|^m \cdot |B|^n.$$

536. Elementul de pe linia α și de pe coloana β al matricei C_{ik} este

$$c_{(i-1)m+\alpha,\,(k-1)m+\beta} = \sum_{s=1}^{mn} a_{(i-1)m+\alpha,\,s} b_{s,\,(k-1)m+\beta} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{v=1}^{m} a_{(i-1)m+\alpha,\,(j-1)m+v} b_{(j-1)m+v,\,(k-1)m+\beta}.$$

Suma interioară din ultima expresie reprezintă, însă, elementul matricei $A_{ij}\,B_{jk}$, luat din linia α și din coloana β. Prin urmare,

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk}.$$

537. Pentru $n = 1$, teorema este banală. Să admitem că am demonstrat teorema pentru matrice de „ordinul" $n - 1$ și să arătăm că este adevărată și pentru matrice de „ordinul" n. Vom considera întîi cazul cînd A_{11} este o matrice nesingulară

$$C = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \dots & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Să înmulțim matricea C la dreapta cu matricea D, unde

$$D = \begin{pmatrix} E, & -A_{11}^{-1}A_{12}, & \dots, & -A_{11}^{-1}A_{1n} \\ & E, & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix}.$$

Atunci $C' = CD$ va fi de forma

$$C' = \begin{pmatrix} A_{11}, & 0, & \dots, & 0 \\ A_{21}, & A'_{22}, & \dots, & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}, & A'_{n2}, & \dots, & A'_{nn} \end{pmatrix},$$

unde $A'_{ik} = A_{ik} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1k}$.

Toate matricele aflate în celulele matricelor C, D și C' sînt comutative. Ne putem convinge ușor că în această ipoteză teorema referitoare la determinantul produsului a două matrice este valabilă și pentru determinanți formali.

Matricea D are determinantul formal E, iar determinantul adevărat al lui D este egal cu 1.

Prin urmare, $|C| = |C'| = |A_{11}| \cdot \begin{vmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix}$, iar pentru determinantul formal al lui B vom avea $B = A_{11} \cdot B'$, unde B' este determinantul formal al matricei

$$\begin{pmatrix} A'_{22}, & \dots, & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A'_{n2}, & \dots, & A'_{nn} \end{pmatrix}$$

În virtutea ipotezei inducției

$$|B'| = \begin{vmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix}$$

și prin urmare $|B| = |A_{11}| \cdot |B'| = |C|$, ceea ce era de demonstrat.

Pentru a putea renunța la restricția $|A_{11}| \neq 0$, putem proceda în modul următor. Introducem matricea

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11} + \lambda E_m, & A_{12}, & \dots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \dots, & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \dots, & A_{nn} \end{pmatrix}$$

și notăm determinantul ei formal cu $B(\lambda)$.

Deoarece $|A_{11} + \lambda E_m| = \lambda^m + \dots \neq 0$, rezultă $|C(\lambda)| = |B(\lambda)|$. Acești doi determinanți sînt polinoame în λ. Comparînd termenii lor liberi deducem că $|C| = |B|$. Cu aceasta demonstrarea este terminată.

CAPITOLUL V

POLINOAME ȘI FUNCȚII RAȚIONALE DE O SINGURĂ VARIABILĂ

538. a) $2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$;

b) $x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$.

539. a) Citul este $2x^2 + 3x + 11$, iar restul $25x - 5$.

b) Citul este $\frac{3x - 7}{9}$, iar restul $\frac{-26x - 2}{9}$.

540. $p = 1$, $q^2 = 1$; $m = q$.

541. 1) $q = p - 1$; $m = 0$; 2) $q = 1$; $m = \pm\sqrt{2 - p^2}$.

542. $(-1)^n \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$.

543. a) $(x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5$;

b) $(x+3)(2x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 39x + 109) - 327$;

c) $(x + 1 + i)[4x^2 - (3 + 4i)x + (-1 + 7i)] + 8 - 16i$;

d) $(x - 1 + 2i)[x^3 - 2ix - 5 - 2i] - 9 + 8i$.

544. a) 136; b) $-1 - 44i$.

545. a) $(x+1)^4 - 2(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$;

b) $(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$;

c) $(x-2)^4 - 18(x-2) + 38$;

d) $(x+i)^4 - 2i(x+i)^3 - (1+i)(x+i)^2 - 5(x+i) + 7 + 5i$;

e) $(x + 1 - 2i)^4 - (x + 1 - 2i)^3 + 2(x + 1 - 2i) + 1$.

546. a) $\dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{6}{(x-2)^3} + \dfrac{11}{(x-2)^4} + \dfrac{7}{(x-2)^5}$;

b) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{4}{(x+1)^2} + \dfrac{4}{(x+1)^3} + \dfrac{2}{(x+1)^5}$.

547. a) $x^4 + 11x^3 + 45x^2 + 81x + 55$;

b) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8$;

548. a) $f(2) = 18$; $f'(2) = 48$; $f''(2) = 124$; $f'''(2) = 216$; $f^{IV}(2) = 240$; $f^{V}(2) = 120$;

b) $f(1 + 2i) = -12 - 2i$;
$f'(1 + 2i) = -16 + 8i$;
$f''(1 + 2i) = -8 + 30i$;
$f'''(1 + 2i) = 24 + 30i$;
$f^{IV}(1 + 2i) = 24$.

549. a) 3; b) 4.

550. $a = -5$.

551. $A = 3$; $B = -4$.

552. $A = n$; $B = -(n + 1)$.

555. Pentru ca $f(x)$ să fie divizibil cu $(x-1)^{k+1}$, este necesar și suficient ca $f(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$ și $f'(x)$ să fie divizibil cu $(x-1)^k$; pentru aceasta, în virtutea condiției $f(1) = 0$, este necesar și suficient ca $f_1(x) = nf(x) - xf'(x)$ să fie divizibil cu $(x-1)^k$. Considerînd în mod formal $f_1(x)$

ca un polinom de gradul $n-1$, repetăm acelaşi raţionament de k ori.

556. a este rădăcina de ordinul de multiplicitate $k+3$, unde k este ordinul lui a ca rădăcină a lui $f'''(x)$.

557. $3125\,b^2 + 108\,a^5 = 0$; $a \neq 0$.

558. $b = 9a^2$; $1728\,a^5 + c^2 = 0$.

559. Derivata $x^{n-m-1}[nx^m + (n-m)a]$ nu are alte rădăcini multiple în afară de 0.

560. Presupunînd că d este cel mai mare divizor comun al lui m şi n, adică $m = dm_1$, $n = dn_1$, obţinem condiţia sub forma

$$(-1)^{n_1}(n_1-m_1)^{n_1-m_1}\, m_1^{m_1} a^{n_1} = b^{m_1} n_1^{n_1}.$$

562. O rădăcină de ordinul de multiplicitate $k-1$, diferită de 0, a polinomului

$$a_1x^{p_1} + a_2x^{p_2} + \ldots + a_kx^{p_k}$$

verifică ecuaţiile

$$\begin{aligned}
a_1x^{p_1} + a_2x^{p_2} + \ldots + a_kx^{p_k} &= 0;\\
p_1a_1x^{p_1} + p_2a_2x^{p_2} + \ldots + p_ka_kx^{p_k} &= 0;\\
p_1^2a_1x^{p_1} + p_2^2a_2x^{p_2} + \ldots + p_k^2a_kx^{p_k} &= 0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
p_1^{k-2}a_1x^{p_1} + p_2^{k-2}a_2x^{p_2} + \ldots + p_k^{k-2}a_kx^{p_k} &= 0,
\end{aligned}$$

de unde rezultă că numerele $a_1x^{p_1}$; $a_2x^{p_2}$, ..., $a_kx^{p_k}$ sînt proporţionale cu complemenţii algebrici ai elementelor din ultima linie a unui determinant Vandermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_1^{k-1} & p_2^{k-1} & p_3^{k-1} & \ldots & p_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

Se verifică uşor că

$$\frac{\Delta}{\Delta_i} = \prod (p_i - p_j) = \varphi'(p_i).$$

De aci rezultă că numerele $a_i x^{p_i}$ sînt invers proporționale cu $\varphi'(p_i)$, adică

$$a_1 x^{p_1} \varphi'(p_1) = a_2 x^{p_2} \varphi'(p_2) = \ldots = a_k x^{p_k} \varphi'(p_k).$$

Toate considerațiile de mai sus se pot inversa.

563. Dacă $f(x)$ este divizibil cu $f'(x)$, atunci cîtul este un polinom de gradul întîi, cu coeficientul lui x egal cu $\frac{1}{n}$, unde n este gradul lui $f(x)$. Deaceea, $nf(x) = (x - x_0) f'(x)$. Prin derivare obținem $(n-1) f'(x) = (x - x_0) f''(x)$ etc., de unde

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x) = a_0 (x - x_0)^n.$$

Reciproca este evidentă.

564. O rădăcină multiplă a polinomului $f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ trebuie să fie totodată și rădăcină a derivatei sale

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x) - \frac{x^n}{n!}.$$

Prin urmare, dacă $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, atunci $x_0 = 0$; însă, 0 nu este rădăcină a lui $f(x)$.

565. Dacă $f(x) = (x - x_0)^k f_1(x)$, unde $f_1(x)$ este o funcție rațională care nu se anulează pentru $x = x_0$, atunci derivarea directă ne dă:

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0; \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Reciproc: dacă $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ și $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, atunci $f(x) = (x - x_0)^k f_1(x)$; $f_1(x_0) \neq 0$, deoarece dacă am fi avut $f(x) = (x - x_0)^m q(x)$, $q(x_0) \neq 0$ pentru $m \neq k$, atunci șirul derivatelor succesive care se anulează pentru $x = x_0$ ar fi fost mai lung sau mai scurt.

566. Funcția

$$g(x) = \frac{\psi(x)}{w(x)} = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

satisface condiția

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Prin urmare $\psi(x) = (x - x_0)^{n+1} F(x)$, unde $F(x)$ este un polinom, ceea ce trebuia demonstrat.

567. Dacă $f_1(x) f_2(x_0) - f_2(x) f_1(x_0)$ nu este identic nul, putem presupune că $f_1(x_0) \neq 0$. Să considerăm funcția rațională $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} - \frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}$. Ea nu este identic nulă și are rădăcina x_0. Ordinul de multiplicitate al acestei rădăcini este mai mare cu o unitate decît ordinul de multiplicitate al lui x_0, ca rădăcină a derivatei, egală cu $\frac{f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)}{[f_1(x)]^2}$, de unde rezultă imediat valabilitatea afirmației pe care vrem să o demonstrăm.

568. Fie x_0 o rădăcină de ordin de multiplicitate k a polinomului $[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)$. Atunci, $f(x_0) \neq 0$, deoarece, în caz contrar, x_0 ar fi fost o rădăcină comună pentru $f(x)$ și $f'(x)$. Conform problemei precedente, x_0 va fi o rădăcină de ordin de multiplicitate $k+1$ pentru polinomul $f(x) f'(x_0) - f(x_0) f'(x)$, al cărui grad este mai mic sau egal cu n. Prin urmare, $k+1 \leqslant n$, $k \leqslant n-1$.

569. Polinomul $f(x) f'(x_0) - f(x_0) f'(x)$ trebuie să admită pe x_0 ca rădăcină de ordin de multiplicitate n, adică trebuie să fie egal cu $A(x - x_0)^n$, unde A este o constantă. Dezvoltarea după puterile lui $x - x_0$ ne dă, după înlocuirea lui $x - x_0$ prin z,

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n) a_1 -$$

și

$$- (a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + n a_n z^{n-1}) a_0 = A z^n.$$

$$a_0 = f(x_0) \neq 0.$$

De aici rezultă $a_2 = \frac{a_1^2}{2a_0}$, $a_3 = \frac{a_1^3}{a_0^2 3!}$, $\ldots$, $a_n = \frac{a_1^n}{a_0^{n-1} n!}$.

Punînd $\frac{a_1}{a_0} = \alpha$, obținem

$$f(x) = a_0 \left[1 + \frac{\alpha (x - x_0)}{1} + \frac{\alpha^2 (x - x_0)^2}{1\,2} + \ldots + \frac{\alpha^n (x - x_0)^n}{n!} \right].$$

570. De exemplu, $\delta = \frac{1}{21}$ $\left(\frac{1}{20} \text{ nu mai este bun} \right)$.

571. De exemplu, $\delta = \frac{1}{25}$ $\left(\frac{1}{24} \text{ nu mai convine} \right)$.

572. De exemplu, $M = 6$.

573. De exemplu, a) $x = \rho i$, $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$;

b) $x = \rho$, $0 \leqslant \rho < \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

574. De exemplu, a) $x = 1 - \rho$, $0 \leqslant \rho < \frac{1}{8}$;

b) $x = 1 + \rho\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4} + i \sin\frac{(2k-1)\pi}{4}\right)$, $\rho < \sqrt[4]{8}$;

c) $x = 1 + \rho i$, $\rho < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

575. Dezvoltarea polinomului $f(z)$ după puterile lui $z - i = h$ dă

$$f(z) = (2 - i)\left[1 + (1 - i)h^3 - \frac{4 + 2i}{5}h^4 + \frac{1 + 3i}{5}h^5\right].$$

Punînd $h = a(1 - i)$, obținem

$$f(z) = (2 - i)\left[1 - 4a^3 + 4a^3\left(\frac{4 + 2i}{5}a - \frac{4 + 2i}{5}a^2\right)\right],$$

de unde

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{5}\left(|1 - 4a^3| + 4a^3\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}\right) < \sqrt{5}$$

pentru $0 < a < \frac{1}{2}$.

576. Scriind polinomul sub forma

$$f(z) = f(z_0)\{1 + r(\cos\varphi + i \sin\varphi)(z - z_0)^k[1 + (z - z_0)\psi(z)]\},$$

se pune $z - z_0 = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, se ia $\theta = \frac{2m\pi - \varphi}{k}$ și ρ suficient de mic pentru ca $|(z - z_0)\psi(z)| < 1$. Atunci

$$|f(z)| = |f(z_0)||1 + r\rho^k + r\rho^k(z - z_0)\psi(z)| > f(z_0).$$

577. Se demonstrează ca și pentru polinoame folosind formula lui Taylor pentru o funcție rațională (problema 566) și oprind dezvoltarea după primul termen cu coeficient diferit de zero, în afară de $f(x_0)$.

578. Să notăm cu M marginea inferioară exactă a lui $f(z)$, cînd z variază în domeniul considerat.

Prin împărțirea domeniului în părți demonstrăm existența unui punct z_0, care are proprietatea că în orice vecinătate a sa marginea inferioară exactă a lui $|f(z)|$ este egală cu M. Dacă este necesar, simplificăm fracția cu $z - z_0$ la puterea cea mai mare posibilă. Fie $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ după această simplificare. Atunci $\psi(z_0) \neq 0$, deoarece altfel, într-o vecinătate suficient de mică a lui z_0, $|f(z)|$ ar fi fost oricît de mare și marginea inferioară a lui $|f(z)|$, într-o vecinătate suficient de mică a lui z_0, nu ar mai fi putut fi egală cu M. Prin urmare, $f(z)$ este continuă pentru $z = z_0$ și, în virtutea continuității, $|f(z_0)| = M$, ceea ce era de demonstrat.

579. Lipsește lema referitoare la creșterea modulului.

580. În ipoteza făcută

$$f(a) \neq 0, \quad f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0; \quad f^{(k)}(a) \neq 0$$

și după formula lui Taylor

$$f(z) = f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k[1 + \varphi(z)]; \quad \varphi(a) = 0.$$

Să punem

$$\frac{1}{f(a)}\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z - a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Vom lua ρ suficient de mic pentru ca $|\varphi(z)| < 1$, $r\rho^k < 1$. Atunci $|f(z)| = |(f(a)| \cdot |1 + r\rho^k[\cos(\varphi + k\theta) + i\sin(\varphi + k\theta)] + r\rho^k\lambda|$, unde $|\lambda| < 1$.

Pentru $\theta = \frac{(2m-1)\pi - \varphi}{k}$, $m = 1, 2, \ldots, k$, vom avea $|f(z)| < (f(a)|$.

Pentru $\theta = \frac{2m\pi - \varphi}{k}$, $m = 1, 2, \ldots, k$, vom avea $|f(z)| > |(f(a)|$.

Deci, cînd θ variază de la $\frac{\pi - \varphi}{k}$ la $\frac{\pi - \varphi}{k} + 2\pi$, atunci $|f(z)| - |(f(a)|$ își schimbă semnul de $2k$ ori. În virtutea continuității lui $|f(z)| - |f(a)|$ ca funcție de θ, atunci $|f(z)| - |f(a)|$ se va anula de $2k$ ori, ceea ce era de demonstrat.

581. Ca şi în problema precedentă, vom arăta că $\Re(f(z)) - \Re(f(a))$ şi $\Im(f(z)) - \Re(f(a))$, pentru $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, îşi schimbă semnul de $2k$ ori, cînd θ variază cu 2π, dacă ρ este suficient de mic. După formula lui Taylor, punînd $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, obţinem $f(z) - f(a) = r\rho^k[\cos(\varphi + k\theta) + i\sin(\varphi + k\theta)][1 + \varphi(z)]$, $\varphi(a) = 0$. Alegîndu-l pe ρ astfel, încît $|\varphi(z)| < 1$, obţinem, după ce am pus $\varphi(z) = \varphi_1(z) + i\varphi_2(z)$,

$$\Re(f(z)) - \Re(f(a)) = r\rho^k[\cos(\varphi + k\theta)(1 + \varphi_1(z)) - \sin(\varphi + k\theta)\varphi_2(z)];$$

$$\Im(f(z)) - \Im(f(a)) = r\rho^k[\sin(\varphi + k\theta)(1 + \varphi_1(z)) + \cos(\varphi + k\theta)\varphi_2(z)].$$

Punînd

$$\varphi + k\theta = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 2k,$$

obţinem

$$\Re(f(z)) - \Re(f(a)) = r\rho^k(-1)^m(1 + i\varepsilon_m),$$

unde ε_m este valoarea corespunzătoare a lui $\varphi_1(z)$, $|\varepsilon_m| < 1$.

De aici rezultă că $\Re(f(z)) - \Re(f(a))$ îşi schimbă semnul de $2m$ ori, cînd z parcurge circumferinţa $|z - a| = \rho$. Obţinem un rezultat analog pentru $\Im(f(z)) - \Im(f(a))$ punînd $\varphi + k\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m = 0, 1, \ldots, 2k$.

582. a) $(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$;

c) $$\left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \times \left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \times$$
$$\times \left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \times \left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right);$$

d) $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2}) \times (x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

583. a) $2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$; b) $2\prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{\sin\left(\theta+\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right)$; c) $\prod_{k=1}^{m}\left(x-\operatorname{tg}^2\frac{(2k-1)\pi}{4m}\right)$.

584. a) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$;

b) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$;

c) $\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}-2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)\times$

$\times\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}+2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$;

d) $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\sqrt[2n]{2}x\cos\frac{(8k+1)\pi}{4n}+\sqrt[n]{2}\right)$;

e) $(x^2-x\sqrt{a+2}+1)(x^2+x\sqrt{a+2}+1)$;

f) $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n}+1\right)$.

585. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)=$
$=x^5-(8+i)x^4+(24+7i)x^3-(34+17i)x^2+(23+17i)x-(6+6i)$;

b) $(x+1)^3(x-3)(x-4)=x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12$;

c) $(x-i)^2(x+1+i)=x^3+(1-i)x^2+(1-2i)x-1-i$.

586. $\prod_{k=1}^{n}X_k(x)$.

587. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)=x^6-9x^5+33x^4-65x^3+74x^2-46x+12$;

b) $(x^2-4x+13)^3=x^6-12x^5+87x^4-376x^3+1131x^2-2028x+2197$;

c) $(x^2+1)^2(x^2+2x+2)=x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x+2$.

588. a) $(x-1)^2(x+2)$; b) $(x+1)^2(x^2+1)$; c) $(x-1)^3$.

589. x^d-1, unde d este cel mai mare divizor comun al lui m și n.

590. $x^d + a^d$, dacă numerele $\frac{m}{d}$ și $\frac{n}{d}$ sînt impare; 1, dacă măcar unul dintre ele este par. Prin d am notat cel mai mare divizor comun al lui m și n.

591. a) $(x-1)^2(x+1)$; b) $(x-1)^3(x+1)$;
c) $x^d - 1$ (d este c.m.m.d.c. al lui m și n).

592. Să notăm $\lambda_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)}$ și să descompunem pe $f(x)$ în factori liniari. $f(x) = (x-\lambda_0)(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_{k-1})$, cu $\lambda_j \neq \lambda_0$ pentru $j \neq 0$. Mai departe,

$$f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{1}{[v(x)]^k}(u(x) - \lambda_0 v(x))\ldots(u(x) - \lambda_{k-1}v(x)).$$

Conform enunțului problemei și a faptului că $u(x_0) - \lambda_j v(x_0) = v(x_0)(\lambda_0 - \lambda_j) \neq 0$, polinomul $u(x) - \lambda_0 v(x)$ admite pe x_0 ca rădăcină de ordin de multiplicitate $k > 1$. Prin urmare, $u'(x) - \lambda_0 v'(x)$ admite pe x_0 ca rădăcină de ordin de multiplicitate $k-1$. Mai departe

$$f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right) = \frac{1}{[v'(x)]^k}(u'(x) - \lambda_0 v'(x))\ldots(u'(x) - \lambda_{k-1}v'(x)).$$

Evident, nici un polinom $u'(x) - \lambda_j v'(x)$, $j \neq 0$, nu se anulează pentru $x = x_0$. Prin urmare, $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)$ admite pe x_0 ca o rădăcină de multiplicitate $k-1$, ceea ce era de demonstrat.

593. Dacă w este o rădăcină a polinomului $x^2 + x + 1$, atunci $w^3 = 1$. Prin urmare $w^{3m} + w^{3n+1} + w^{3p+2} = 1 + w + w^2 = 0$.

594. Rădăcina λ a polinomului $x^2 + x + 1$ satisface ecuația $\lambda^3 = -1$.

Prin urmare

$$\lambda^{3m} - \lambda^{3n+1} + \lambda^{3p+2} = (-1)^m - (-1)^n\lambda + (-1)^p\lambda^2 =$$
$$= (-1)^m - (-1)^p + \lambda[(-1)^p - (-1)^n].$$

Ultima expresie se poate anula numai dacă $(-1)^m = (-1)^p = (-1)^n$, adică dacă m, n, p sînt în același timp numere pare sau numere impare.

595. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. Acești factori sînt primi între ei și $x^2 + x + 1$ este totdeauna un divizor al lui $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ (problema 595). Ne rămîne să

stabilim cînd are loc divizibilitatea cu $x^2 - x + 1$. Introducînd rădăcina λ a acestui polinom, obținem

$$(-1)^m + (-1)^n \lambda + (-1)^p \lambda^2 =$$
$$= (-1)^m - (-1)^p + \lambda[(-1)^n + (-1)^p].$$

Ultima expresie devine nulă numai dacă $(-1)^m = (-1)^p = -(-1)^n$, adică dacă numerele m, p și $n + 1$ sînt în același timp pare sau impare.

596. Dacă m nu este divizibil cu 3.

597. Toate rădăcinile polinomului $x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1$ sînt rădăcini de ordinul k ale unității. Prin urmare, $\xi^{ka_1} + \xi^{ka_2+1} + \ldots + \xi^{ka_k+k-1} = 1 + \xi + \ldots + \xi^{k-1} = 0$. De aici rezultă divizibilitatea, deoarece toate rădăcinile lui $x^{k-1} + \ldots + 1$ sînt simple.

598. Substituirea rădăcinii w a polinomului $x^2 + x + 1$ în $f(x) = (1 + x)^m - x^m - 1$ ne dă $(1 + w)^m - w^m - 1$; $1 + w = -w^2 = \lambda$ este, însă, o rădăcină primitivă de ord nul al șaselea a unității. Mai departe, $w = \lambda^2$, de unde $f(w) = \lambda^m - \lambda^{2m} - 1$.

Pentru

$m = 6n$ $\quad f(w) = -1 \neq 0$;
$m = 6n + 1$ $\quad f(w) = \lambda - \lambda^2 - 1 = 0$;
$m = 6n + 2$ $\quad f(w) = \lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0$;
$m = 6n + 3$ $\quad f(w) = -3 \neq 0$;
$m = 6n + 4$ $\quad f(w) = -\lambda + \lambda^2 - 1 \neq 0$;
$m = 6n + 5$ $\quad f(w) = -\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$.

Divizibilitatea lui $f(x)$ cu $x^2 + x + 1$ are loc pentru $m = 6n + 1$ și $m = 6n + 5$.

599. Pentru $m = 6n + 2$ și $m = 6n + 4$.

600. $f(w) = m(1 + w)^{m-1} - mw^{m-1} = m[\lambda^{m-1} - \lambda^{2(m-1)}]$, $f'(w) = 0$, numai pentru $m = 6n + 1$.

601. Pentru $m = 6n + 4$.

602. Nu, deoarece primele două derivate nu se anulează simultan.

603. Pentru $x = k$, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$f(k) = 1 - \frac{k}{1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \ldots + (-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots k} = (1-1)^k = 0.$$

Prin urmare, polinomul este divizibil cu $(x - 1)(x - 2) \ldots (x - n)$. Compararea coeficienților termenilor de gradul cel mai înalt ne dă

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x - 1)(x - 2) \ldots (x - n).$$

604. Pentru numere m prime cu n.

605. Dacă $f(x^n)$ este divizibil cu $x-1$, atunci $f(1)=0$ şi, prin urmare, $f(x)$ este divizibil cu $x-1$, de unde rezultă că $f(x^n)$ este divizibil cu x^n-1.

606. Dacă $F(x)=f(x^n)$ este divizibil cu $(x-a)^k$, atunci $F'(x)=f'(x^n)nx^{n-1}$ este divizibil cu $(x-a)^{k-1}$, de unde rezultă că $f'(x^n)$ este divizibil cu $(x-a)^{k-1}$. Tot astfel $f''(x^n)$ este divizibil cu $(x-a)^{k-2}$, ..., $f^{(k-1)}(x^n)$ este divizibil cu $x-a$. De aici rezultă că $f(a^n)=f'(a^n)=\ldots=f^{k-1}(a^n)=0$ şi, prin urmare, $f(x)$ este divizibil cu $(x-a^n)^k$, iar $f(x^n)$ este divizibil cu $(x^n-a^n)^k$.

607. Dacă $F(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ este divizibil cu x^2+x+1, atunci $F(w)=f_1(1)+wf_2(1)=0$ (w este o rădăcină a polinomului x^2+x+1) şi $F(w^2)=f_1(1)+w^2f_2(1)=0$, de unde $f_1(1)=f_2(1)=0$.

608. Polinomul $f(x)$ nu are rădăcini reale de multiplicitate impară, deoarece altfel şi-ar schimba semnul. Prin urmare $f(x)=[f_1(x)]^2f_2(x)$, unde $f_2(x)$ este un polinom care nu are rădăcini reale. Vom împărţi rădăcinile complexe ale polinomului f_2 în două grupe; rădăcinile complex conjugate le vom considera ca făcînd parte din grupe diferite. Produsele factorilor liniari care corespund rădăcinilor fiecărei grupe formează polinoame cu coeficienţi conjugaţi $\psi_1(x)+i\psi_2(x)$ şi $\psi_1(x)-i\psi_2(x)$. Prin urmare

$$f_2(x)=\psi_1^2(x)+\psi_2^2(x) \quad \text{şi} \quad f(x)=(f_1\psi_1)^2+(f_1\psi_2)^2$$

609. a) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$; b) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$;

c) $x_1-a, x_2-a, \ldots, x_n-a$; d) $bx_1, bx_2, \ldots, bx_n$.

610. Una dintre rădăcini trebuie să fie egală cu $-\frac{p}{2}$. Relaţia căutată este $8r=4pq-p^3$.

611. $x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{1}{3}$.

612. $a^3-4ab+8c=0$.

613. Relaţia dintre rădăcini se va păstra pentru orice α. Luînd $\alpha=-\frac{a}{4}$, obţinem pentru ecuaţia transformată

$y^4+a'y^3+b'y^2+c'y+d'=0$; $a'=0$, $a'^3-4a'b'+8c'=0$, de unde $c'=0$.

614. $a^2d=c^2$.

615. Împărțirea cu x^2 ne dă $x^2 + \frac{d}{x^2} + a\left(x + \frac{c}{ax}\right) + b = 0$. Substituind $x + \frac{c}{ax} = z$, obținem $x^2 + \frac{d}{x^2} = x^2 + \frac{c^2}{a^2x^2} = z^2 - 2\frac{c}{a}$, de unde obținem pentru z ecuația de gradul al doilea $z^2 + az + b - 2\frac{c}{a} = 0$. După ce l-am determinat pe z, găsim ușor pe x (ecuații reciproce generalizate).

616. a) $x = 1 \pm \sqrt{3}$; $1 \pm i\sqrt{2}$; b) $x = 1 \pm 2i$; $-2 \pm i$; c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$; d) $x = 1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

617. $\lambda = \pm 6$.

618. 1) $b = c = 0$; a este arbitrar;
2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$.

619. 1) $a = b = c = 0$; 2) $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$;
3) $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$;
4) $b = \lambda$; $a = -\frac{1}{\lambda}$; $c = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda}$, unde $\lambda^3 - 2\lambda + 2 = 0$.

620. $\lambda = -3$.

621. $q^3 + pq + q = 0$. **622.** $a_1^2 - 2a_2$.

623. $x_i = -\frac{a_1}{n} + \frac{2i - n - 1}{2}h$, $i = 1, 2, \ldots, n$, unde

$$h = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{12(n-1)a_1^2 - 24na_2}{n^2 - 1}}.$$

624. Dacă rădăcinile ar forma o progresie aritmetică, atunci, după formula din problema precedentă, ele ar fi egale cu:

a) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, care verifică în adevăr ecuația.

b) $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, care nu verifică ecuația.

625. Fie $y = Ax + B$ ecuația dreptei căutate. Atunci, rădăcinile ecuației $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = Ax + B$ formează o progresie aritmetică. Le găsim în conformitate cu problema 623.

$$x_i = -\frac{a}{4} + \frac{2i - 5}{2}h, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

unde

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9a^2 - 24b}{15}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2 - 8b}{5}}.$$

De aici

$$A - c = x_1x_4(x_2 + x_3) + x_2x_3(x_1 + x_4) =$$
$$= -\left(\frac{a^2}{16} - \frac{9}{4}h^2\right)\frac{a}{2} - \left(\frac{a^2}{16} - \frac{1}{4}h^2\right)\frac{a}{2} = \frac{a^3 - 4ab}{8};$$

$$d - B = x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{1600}(36b - 11a^2)(4b + a^2).$$

Prin urmare

$$A = \frac{a^3 - 4ab + 8c}{8}; \quad B = d - \frac{1}{1600}(36b - 11a^2)(4b + a^2)>$$

Punctele de intersecție vor fi reale și distincte dacă $3a^2 - 8b > 0$, adică dacă derivaa ta doua $2(6x^2 + 3ax + b)$ își schimbă semnul, cînd x variază pe axa reală.

626. $x^4 - ax^2 + 1 = 0$, unde $a = \frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^2}$.

627. $(x^2 - x + 1)^3 - a(x^2 - x)^2 = 0$; $a = \frac{(\alpha^2 - \alpha + 1)^3}{(\alpha^2 - \alpha)^2}$.

628. $f'(x_i) = (x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$;
$f''(x_i) = 2[(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n) +$
$+ (x_i - x_1)(x_i - x_3)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n) +$
$+ \ldots + (x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots$
$\ldots(x_i - x_{n-1})] = 2f'(x_i) \sum_{\substack{s=1,2,\ldots,n \\ s\neq i}} \frac{1}{x_i - x_s}$ (dacă $x_s \neq x_i$).

629. Rezultă imediat din problema 628.

630. Fie $x_i = x_1 + (i - 1)h$. Atunci

$$f'(x_i) = (-1)^{n-i}(i - 1)!\,(n - i)!\,h^{n-1}.$$

631. a) $x + 1$; b) $x^2 + 1$; c) $x^3 + 1$; d) $x^2 - 2x + 2$;
e) $x^3 - x + 1$; f) $x + 3$; g) $x^2 + x + 1$; h) $x^2 - 2x\sqrt{2} - 1$;
i) $x + 2$; j) 1; k) $2x^2 + x - 1$; l) $x^2 + x + 1$.

632. a) $(-x - 1)f_1(x) + (x + 2)f_2(x) = x^2 - 2$;
b) $-f_1(x) + (x + 1)f_2(x) = x^3 + 1$;
c) $(3 - x)f_1(x) + (x^2 - 4x + 4)f_2(x) = x^2 + 5$;
d) $(1 - x^2)f_1(x) + (x^3 + 2x^2 - x - 1)f_2(x) = x^3 + 2$;
e) $(-x^2 + x + 1)f_1(x) + (x^3 + 2x^2 - 5x - 4)f_2(x) = 3x + 2$;
f) $-\frac{x - 1}{2}f_1(x) + \frac{2x^2 - 2x - 3}{3}f_2(x) = x - 1$.

633. a) $M_2(x) = x$; $M_1(x) = -3x^2 - x + 1$;

b) $M_2(x) = -x - 1$; $M_1(x) = x^3 + x^2 + 3x - 2$;

c) $M_2(x) = \frac{-x^3 + 3}{2}$; $M_1(x) = \frac{x^4 - 2x^2 - 2}{2}$;

d) $M_2(x) = -\frac{2x^2 + 3x}{6}$; $M_1(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{6}$;

e) $M_2(x) = 3x^2 + x - 1$; $M_1(x) = -3x^3 + 2x^2 + x - 2$;

f) $M_2(x) = -x^3 - 3x^2 - 4x - 2$;

$M_1(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 7$.

634. a) $M_2(x) = \frac{-16x^2 + 37x + 26}{3}$;

$M_1(x) = \frac{16x^3 - 53x^2 - 37x - 23}{3}$;

b) $M_2(x) = 4 - 3x$; $M_1(x) = 1 + 2x + 3x^2$;

c) $M_2(x) = 35 - 84x + 70x^2 - 20x^3$;

$M_1(x) = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3$.

635. a) $M_1(x) = 9x^2 - 26x - 21$;

$M_2(x) = -9x^3 + 44x^2 - 39x - 7$;

b) $M_1(x) = 3x^3 + 3x^2 - 7x + 2$;

$M_2(x) = -3x^3 - 6x^2 + x + 2$.

636. a) $4x^4 - 27x^3 + 66x^2 - 65x + 24$;

b) $-5x^7 + 13x^6 + 27x^5 - 130x^4 + 75x^3 + 266x^2 - 440x + 197$.

637. $N(x) = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)}x^{m-1}$;

$M(x) = 1 + \frac{m}{1}(1-x) + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}(1-x)^2 + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}(1-x)^{n-1} =$

$= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-1)!} - \frac{m}{1}\frac{(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-2)!}x + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}\frac{(m+3)\ldots(m+n-1)}{(n-3)!}x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1}$.

638. 1.

639. a) $(x+1)^4(x-2)^2$; b) $(x+1)^4(x-4)$;

c) $(x-1)^3(x+3)^2(x-3)$;

d) $(x-2)(x^2-2x+2)^2$;
e) $(x^3-x^2-x-2)^2$; f) $(x^2+1)^2(x-1)^3$;
g) $(x^4+x^3+2x^2+x+1)^2$.

640. a) $f(x) = x+1+\frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $f(x) = -x^4+4x^3-x^2-7x+5$;

c) $f(x) = 1+\frac{2}{5}(x-1)-\frac{1}{105}(x-1)(4x-9)+$

$+\frac{1}{945}(x-1)(4x-9)(x-4)$;

$f(2) = 1\frac{389}{945} = 1{,}4116\ldots$ $(\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots)$;

d) $f(x) = x^3-9x^2+21x-8$.

641. a) $y = -\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4)+$

$+\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4)-2(x-1)(x-2)(x-4)+$

$+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3) = -\frac{4}{3}x^3+10x^2-\frac{65}{3}x+15$;

b) $y = \frac{1}{2}(5-(1-i)x-x^2-(1+i)x^3)$.

642. $f(x) = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k$.

Soluţie. $f(x) = \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(s+1)(x^n-1)}{(x-\varepsilon_s)n\varepsilon_s^{n-1}} =$

$= \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(s+1)(1-x^n)}{(1-x\varepsilon_s^{-1})} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(s+1)x^k\varepsilon_1^{-ks} =$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x^k\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\varepsilon_1^{-ks} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)+$

$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}x^k\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\varepsilon_k^{-s} = \frac{n+1}{2}-$

$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{1-\varepsilon_k^{-1}} = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k$.

643. $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(x^n-1)}{(x-\varepsilon_k)\,n\varepsilon_k^{n-1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(1-x^n)}{1-x\varepsilon_k^{-1}}$; $f(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y^k$.

644. Să notăm $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Fie $f(x)$ un polinom arbitrar de grad cel mult $n-1$, iar $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, valorile lui pentru $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$. Atunci

$$f(x_0)=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\varphi(x_0)}{\varphi'(x_i)(x_0-x_i)}.$$

Deoarece valorile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt arbitrare, rezultă:

$$\frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_i)(x_0-x_i)}=\frac{1}{n}.$$

Să examinăm polinomul

$$F(x)=n[\varphi(x_0)-\varphi(x)]-(x_0-x)\varphi'(x).$$

Gradul său este mai mic decît n și el se anulează pentru $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$. Prin urmare, $F(x)=0$. Să dezvoltăm pe $\varphi(x)$ după puterile lui $(x-x_0)$

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k.$$

Avem $\sum_{k=1}^{n}(n-k)c_k(x-x_0)^k=0$. Prin urmare, $c_1=c_2=\ldots=c_{n-1}=0$;

$$\varphi(x)=(x-x_0)^n+c_0,\quad x_i=x_0+\sqrt[n]{-c_0}.$$

645. $x^s=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$.

Compararea coeficienților lui x^{-1} ne dă

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)}=0.$$

646. $x^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$.

Compararea coeficienţilor lui x^{n-1} ne dă

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)} = 1.$$

647. $a_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta_{ki}$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

iar Δ_{ki} este complementul algebric al elementului liniei k şi al coloanei $i+1$ a determinantului Δ.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} y_k \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{ki} x^i = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\Delta_k}{\Delta},$$

unde Δ_k este determinantul obţinut din Δ prin înlocuirea elementelor liniei k cu $1, x, \dots, x^{n-1}$.

Calculul determinanţilor Δ_k şi Δ ca determinanţi Vandermonde ne dă

$$\frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} = \frac{\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x)},$$

unde $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

De aici $f(x) = \sum \frac{y_k \varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}$, adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

648. $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \dots + \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$.

649. $f(x) = 1 + \frac{(a-1)x}{1} + \frac{(a-1)^2 x(x-1)}{1 \cdot 2} + \dots$

$$\dots + \frac{(a-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}.$$

650. $f(x) = 1 + \frac{2x}{1} + \frac{2x(2x-2)}{1 \cdot 2} + \ldots$

$$\ldots + \frac{2x(2x-2)\ldots(2x-4n+2)}{(2n)!}.$$

651. $f(x) = 1 + \frac{x-1}{2!} - \frac{(x-1)(x-2)}{3!} - \ldots$

$$\ldots + (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!} = \frac{n!-(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{n!\,x}.$$

652. $f(x) = \frac{\varphi(a)-\varphi(x)}{\varphi(a)(x-a)}$, unde $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

653. Îl căutăm pe $f(x)$ sub forma

$$f(x) = A_0 + A_1 \frac{x-m}{1} + A_2 \frac{(x-m)(x-m-1)}{1 \cdot 2} + \ldots$$

$$\ldots + A_n \frac{(x-m)(x-m-1)\ldots(x+m-n+1)}{n!},$$

unde $m, m+1, \ldots, m+n$ sînt valorile întregi ale lui x, pentru care $f(x)$ ia prin ipoteză valori întregi.

Punînd succesiv $x=m, m+1, \ldots, m+n$, obținem următoarele relații pentru determinarea lui $A_0, A_1, \ldots, A_n$

$$A_0 = f(m),$$

$$A_k = f(m+k) - A_0 - \frac{k}{1} A_1 - \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} A_2 - \ldots - kA_{k-1},$$

$$k = 1, \ldots, n$$

din care rezultă că toți coeficienții A_k sînt întregi. Pentru valori întregi ale lui x, toți termenii lui $f(x)$ se transformă în coeficienți binomiali cu factori întregi A_k și, de aceea, sînt numere întregi. Prin urmare, pentru valori întregi ale lui x, $f(x)$ ia valori întregi, ceea ce trebuia demonstrat.

654. Polinomul $F(x) = f(x^2)$ de gradul $2n$ ia valori întregi pentru $2n+1$ valori ale variabilei: $x = -n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$ și, deci, în virtutea problemei precedente ia valori întregi pentru toate valorile întregi ale lui x.

655. a) $\frac{1}{12(x-1)} - \frac{4}{3(x+2)} + \frac{9}{4(x+3)}$;

b) $-\frac{1}{6(x-1)}+\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{1}{6(x-4)}$;

c) $\frac{2}{x-1}+\frac{-2+i}{2(x-i)}+\frac{-2-i}{2(x+i)}$;

d) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{i}{4(x-i)}+\frac{i}{4(x+i)}$;

e) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{x-\varepsilon^2}\right)$; $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

f) $-\frac{1}{16}\left(\frac{1+i}{x-1-i}+\frac{1-i}{x-1+i}+\frac{-1+i}{x+1-i}+\frac{-1-i}{x+1+i}\right)$;

g) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}$; $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$;

h) $-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{x-\eta_k}$; $\eta_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}$;

i) $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-1)^{n-k}}{x-k}$; j) $\sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^{n-k}C_{2n}^{n+k}}{x-k}$;

k) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}$.

656. a) $\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$;

b) $\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2(x^2+4)}$;

c) $\frac{1}{8}\frac{x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{8}\frac{x-2}{x^2-2x+2}$;

d) $\frac{1}{18}\left(\frac{1}{x^2+3x+3}+\frac{1}{x^2-3x+3}-\frac{2}{x^2+3}\right)$;

e) $\frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{x-1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}-\cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right]$;

f) $\dfrac{(-1)^m}{2n+1}\left[\dfrac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x\cos\dfrac{2k(m+1)\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{2km\pi}{2n+1}}{x^2+2x\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}+1}\right]$;

g) $\dfrac{1}{2n}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{x\cos\dfrac{k\pi}{n}-1}{x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1}\right]$;

h) $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\dfrac{(2k-1)m\pi}{n}-x\cos\dfrac{(2k-1)(2m+1)\pi}{2n}}{x^2-2x\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}+1}$;

i) $\dfrac{1}{(n!)^2\,x}+2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)\,k_x}{(n+k)!\,(n-k)!\,(x^2+k^2)}$.

657. a) $\dfrac{1}{4(x-1)^2}-\dfrac{1}{4(x+1)^2}$;

b) $\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{4(x-1)^2}+\dfrac{1}{4(x+1)^2}$;

c) $\dfrac{3}{(x-1)^3}-\dfrac{4}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$;

d) $\dfrac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k^2}{(x-\varepsilon_k)^2}-(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k}{(x-\varepsilon_k)}\right]$,

$\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$;

e) $\dfrac{1}{x^m}+\dfrac{\dfrac{n}{1}}{x^{m-1}}+\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}}{x^{m-2}}+\ldots+\dfrac{\dfrac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}}{x}+$

$+\dfrac{1}{(1-x)^n}+\dfrac{\dfrac{m}{1}}{(1-x)^{n-1}}+\dfrac{\dfrac{m(m+1)}{1\cdot 2}}{(1-x)^{n-2}}+\ldots$

$\ldots+\dfrac{\dfrac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}}{1-x}$;

f) $\dfrac{1}{(-4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\,\dfrac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}\times$

$$\times\left[\frac{1}{(a-x)^{n-k}}+\frac{1}{(a+x)^{n-k}}\right];$$

g) $\dfrac{1}{(4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\,\dfrac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}\times$

$$\times\left[\frac{1}{(a-ix)^{n-k}}+\frac{1}{(a+ix)^{n-k}}\right];$$

h) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{g(x_k)}{[f'(x_k)]^2(x-x_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{g'(x_k)f'(x_k)-g(x_k)f''(x_k)}{[f'(x_k)]^3(x-x_k)}$.

658. a) $-\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{x-1}{4(x^2+1)}+\dfrac{x+1}{2(x^2+1)^2}$;

b) $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}-\dfrac{6x+2}{x^2+x+1}-\dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$;

c) $\dfrac{1}{16(x-1)^2}-\dfrac{3}{16(x-1)}+\dfrac{1}{16(x+1)^2}+\dfrac{3}{16(x+1)}+$

$$+\frac{1}{4(x^2+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)^2};$$

d) $\dfrac{1}{4n^2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2n-1}{x-1}+\dfrac{2n-1}{x+1}\right]+$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2\dfrac{k\pi}{n}\left(1-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\left(x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1\right)^2}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-\sin^2\dfrac{k\pi}{n}-\left(n-\dfrac{1}{2}\right)x\cos\dfrac{k\pi}{n}}{x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1}.$$

659. a) $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; b) $\dfrac{x\varphi'(x)-n\varphi(x)}{\varphi(x)}$; c) $\dfrac{[\varphi'(x)]^2-\varphi(x)\varphi''(x)}{[\varphi(x)]^2}$.

660. a) 9; b) $-\dfrac{\varphi'(2)}{\varphi(2)}+\dfrac{\varphi'(1)}{\varphi(1)}=-\dfrac{17}{5}$; c) 17.

661. $0{,}51x+2{,}04$. **662.** $y=\dfrac{1}{7}[0{,}55x^2+2{,}35x+6{,}98]$.

663. Substituind $\frac{p}{q}$ în $f(x)$ obținem, după ce am înmulțit cu q^n:

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0,$$

de unde

$$\frac{a_0p^n}{q} = -(a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}),$$

$$\frac{a_nq^n}{p} = -(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}).$$

În membrii din dreapta ai ultimelor două egalități se găsesc numere întregi. Numerele p și q sînt prime între ele. Prin urmare, a_0 este divizibil cu q, iar a_n este divizibil cu p.

Să ordonăm acum $f(x)$ după puterile lui $x-m$:

$$f(x) = a_0(x-m)^n + c_1(x-m)^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(x-m) + c_n.$$

Coeficienții $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sînt numere întregi, deoarece m este număr întreg, $c_n = f(m)$. Făcînd $x = \frac{p}{q}$, obținem

$a_0(p-mq)^n + c_1(p-mq)^{n-1}q + \ldots + c_{n-1}(p-mq)q^{n-1} + c_nq^n = 0$, de unde rezultă că $\frac{c_nq^n}{p-mq}$ este un număr întreg.

Întrucît fracția $\frac{p-mq}{q} = \frac{p}{q} - m$ este ireductibilă, numerele $p-mq$ și q sînt prime între ele. Prin urmare $c_n = f(m)$ este vizibil cu $p-mq$, ceea ce trebuia demonstrat.

664. Pentru exemplul *a*) dăm soluția completă.

a) valorile posibile pentru p sînt: $1; -1; 2; -2; 7; -7; 14, -14$. Pentru q poate fi luată numai valoarea 1 (considerăm semnul adăugat la numărător).

$f(1) = -4$. Prin urmare, $p-1$ trebuie să fie un divizior al lui 4. Valorile posibile $p = 1; -2; 7; -7; 14, -14$ trebuie, deci, eliminate. Ne rămîne să încercăm -1 și 2.

$f(-1) \neq 0$; $f(2) = 0$. Singura rădăcină rațională este $x_1 = 2$.

b) $x_1 = -3$; c) $x_1 = -2$; $x_2 = 3$; d) $x_1 = -3$; $x_2 = \frac{1}{2}$;

e) $\frac{5}{2}$; $-\frac{3}{4}$; f) $1; -2; 3$; g) $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$;

h) Nu există rădăcini raționale; i) $-1, -2, -3, +4$;

k) $\frac{1}{2}$; l) $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$; m) $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = x_4 = -3$;
n) $x_1 = 3$; $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = -1$; o) $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

665. Conform problemei 663, p și $p-q$ sînt numere impare în același timp. Prin urmare, q este un număr par și nu poate fi egal cu unitatea.

666. Conform problemei 663, $p - x_1 q = \pm 1$; $p - x_2 q = \pm 1$, de unde $(x_2 - x_1)q = \pm 2$ sau 0. Valoarea 0 trebuie eliminată deoarece $q > 0$, $x_2 \neq x_1$. Presupunînd, pentru fixarea ideilor, $x_2 > x_1$, obținem $(x_2 - x_1)q = 2$. Această egalitate este imposibilă pentru $(x_2 - x_1) > 2$. Să presupunem că $x_2 - x_1 = 1$ sau 2. Singurele valori ale lui p și q, pentru care este posibilă egalitatea $(x_2 - x_1)q = 2$ sînt $p = x_1 q + 1$, $q = \frac{2}{x_2 - x_1}$, de unde rezultă că singura rădăcină rațională posibilă este $\frac{p}{q} = x_1 + \frac{1}{q} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, ceea ce trebuia demonstrat.

667. Criteriul lui Eisenstein este îndeplinit
a) Pentru $p = 2$.
b) Pentru $p = 3$.
c) Pentru $p = 3$, după dezvoltarea polinomului după puterile lui $x - 1$.

668. $X_p(x) = (x-1)^{p-1} + \frac{p}{1}(x-1)^{p-2} + \ldots + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(x-1)^{p-3} + \ldots + p$.

Toți coeficienții $C_k = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}$, $k \leqslant p-1$, sînt divizibili cu p, deoarece $k!\, C_k = p(p-1)\ldots(p-k+1)$ este divizibil cu p, iar $k!$ este prim cu p. Astfel, pentru polinoamele $X_p(x)$ dezvoltate după puterile lui $x - 1$ criteriul lui Eisenstein este îndeplinit, dacă p este un număr prim.

669. Să aplicăm criteriul lui Eisenstein pentru numărul p, punînd $x = y + 1$:

$$X_{p^k}(x) = \varphi(y) = \frac{(y+1)^{p^k} - 1}{(y+1)^{p^{k-1}} - 1}.$$

Coeficientul termenului de gradul cel mai înalt al polinomului φ este egal cu 1. Termenul liber al lui $\varphi(y)$ este egal cu

$\varphi(0) = X_{p^k}(1) = p$ este divizibil cu p și nu se divide cu p^2. Ne rămîne să demonstrăm că toți ceilalți coeficienți sînt, de asemenea, divizibili cu p. Pentru aceasta, vom demonstra prin inducție că toți coeficienții polinomului $(x+1)^{p^n}-1$, în afară de primul, sînt divizibili cu p. Acest lucru este adevărat pentru $n=1$. Să admitem că l-am demonstrat pentru exponentul p^{n-1}, adică $(y+1)^{p^{n-1}} = y^{p^{n-1}} + 1 + pw_{n-1}(y)$, unde $w_{n-1}(y)$ este un polinom cu coeficienți întregi. Atunci $(y+1)^{p^n} = (y^{p^{n-1}} + 1 + pw_{n-1}(y))^p = (y^{p^{n-1}}+1)^p + p\psi(y) = y^{p^n} + 1 + pw_n(y)$; $\psi(y)$ și $w_n(y)$ sînt polinoame cu coeficienți întregi. Așadar

$$\varphi(y) = \frac{y^{p^k} + pw_k(y)}{y^{p^{k-1}} + pw_{k-1}(y)} =$$

$$= y^{p^k - p^{k-1}} + p\,\frac{w_k(y) - y^{p^k - p^{k-1}} w_{k-1}(y)}{y^{p^{k-1}} + pw_{k-1}(y)} = y^{p^k - p^{k-1}} + p\chi(y).$$

Coeficienții polinomului $\chi(y)$ sînt întregi, deoarece $\chi(y)$ este cîtul din împărțirea unor polinoame cu coeficienți întregi și primul coeficient al împărțitorului este egal cu 1. Prin urmare toți coeficienții polinomului $\varphi(y)$, înafară de primul, sînt divizibili cu p. Condițiile teoremei lui Eisenstein sînt îndeplinite.

670. Să admitem că polinomul ar fi reductibil:

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x).$$

Ambii factori au atunci coeficienți întregi și gradele lor sînt mai mari decît 1, deoarece, prin ipoteză, $f(x)$ nu are rădăcini raționale. Fie

$$\varphi(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_k;$$

$$\psi(x) = c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ldots + c_m;$$

$k \geqslant 2$; $m \geqslant 2$, $k+m=n$. Întrucît $b_kc_m = a_n$ este divizibil cu p și nu este divizibil cu p^2, putem admite că b_k este divizibil cu p și c_m nu este divizibil cu p.

Fie b_i primul coeficient al lui $\varphi(x)$ care nu este divizibil cu p, $i \geqslant 0$. Un astfel de coeficient există, întrucît $a_0 = b_0c_0$ nu este divizibil cu p. Atunci, $a_{m+i} = b_ic_m + b_{i+1}c_{m-1} + \ldots$ nu este divizibil cu p, deoarece b_ic_m nu este divizibil cu p, iar b_{i+1}, b_{i+2} ... sînt divizibili cu p. Această contrazice ipoteza, deoarece $m+i \geqslant 2$.

671. După ce am descompus $f(x)$ în factori ireductibili cu coeficienți întregi, să considerăm factorul ireductibil $\varphi(x)$ al cărui termen liber este divizibil cu p. Un astfel de factor există, deoarece a_n este divizibil cu p. Vom nota cu $\psi(x)$ câtul împărțirii lui $f(x)$ cu $\varphi(x)$. Fie

$$\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m,$$
$$\psi(x) = c_0x^h + c_1x^{h-1} + \ldots + c_h$$

și fie b_i primul coeficient al lui $\varphi(x)$ care nu se divide cu p. c_h nu este divizibil cu p, deoarece $a_n = b_mc_h$ nu se divide cu p^2.

De aceea, $a_{h+i} = b_ic_h + b_{i+1}c_{h-1} + \ldots$ nu este divizibil cu p, de unde rezultă $h + i \leqslant k$. Prin urmare, $m \geqslant m + h + i - k = n + i - k \geqslant n - k$.

672. a) $f(0)=1$; $f(1)=-1$; $f(-1)=-1$.

Dacă $f(x)=\varphi(x)\,\psi(x)$, iar gradul lui $\varphi(x) \leqslant 2$, atunci $\varphi(0) = \pm 1$; $\varphi(1) = \pm 1$; $\varphi(-1) = \pm 1$, adică $\varphi(x)$ este definit prin una dintre coloanele tabelei de valori

x	$\varphi(x)$							
-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
0	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1

Ultimele cinci coloane ale tabelei pot fi lăsate la o parte, deoarece ultimele patru definesc polinoame care diferă numai prin semn de polinoamele definite prin primele patru coloane ale tabelei iar a patra definește un polinom identic egal cu unu. Primele trei coloane dau următoarele soluții pentru $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = -(x^2 + x - 1);\ \varphi(x) = x^2 - x - 1;\ \varphi(x) = 2x^2 - 1.$$

Încercările prin împărțire ne dau

$$f(x) = (x^2 + x - 1)\ (x^2 - x - 1).$$

b) Ireductibil.

c) Ireductibil.

d) $(x^2 - x - 1)\,(x^2 - 2)$.

673. Un polinom reductibil de gradul al treilea are un factor de gradul întîi cu coeficienți raționali și, de aceea, are o rădăcină rațională.

674. Un polinom $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, care nu are rădăcini raționale și este reductibil, poate fi descompus numai în factori de gradul al doilea cu coeficienți întregi:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+\lambda x+m)(x^2+\mu x+n).$$

Evident, numărul m trebuie să fie un divizor al lui d; $mn=d$. Din compararea coeficienţilor lui x^3 şi x rezultă

$$\lambda+\mu=a,$$
$$n\lambda+m\mu=c.$$

Acest sistem este nedeterminat numai dacă $m=n$, $c=am$, adică dacă $c^2=a^2d$. (v. problema 614).

Dacă $m\neq n$, atunci $\lambda=\frac{c-am}{n-m}=\frac{cm-am^2}{d-m^2}$, ceea ce era de demonstrat.

675. În cazul reductibilităţii, este necesar ca

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=$$
$$=(x^2+\lambda x+m)(x^3+\lambda' x^2+\lambda'' x+n).$$

Coeficienţii factorilor trebuie să fie întregi.

Din compararea coeficienţilor obţinem: $mn=e$; de unde rezultă că m este un divizor al lui e. Mai departe

$$\lambda+\lambda'=a,$$
$$n\lambda+m\lambda''=d,$$
$$m+\lambda\lambda'+\lambda''=b,$$
$$n+\lambda\lambda''+m\lambda'=c,$$

de unde $m\lambda''-n\lambda'=d-an$,

$$\lambda(m\lambda''-n\lambda')+m^2\lambda'-n\lambda''=cm-bn,$$

şi, prin urmare, $(d-an)\lambda+m^2\lambda'-n\lambda''=cm-bn$. Rezolvînd această ecuaţie împreună cu $\lambda+\lambda'=a$, $n\lambda+m\lambda''=d$, obţinem

$$\lambda=\frac{am^3-cm^2-dn+be}{m^3-n^2+ae-dm},$$

ceea ce era de demonstrat.

676. a) $(x^2-2x+3)(x^2-x-3)$;

b) ireductibil;

c) $(x^2-x-4)(x^2+5x+3)$;

d) $(x^2-2x+2)(x^3+3x+3)$.

677. Fără a reduce din generalitate, putem căuta condiţiile în care x^4+px^2+q se descompune într-un produs de factori de gradul al doilea cu coeficienţi raţionali, deoarece dacă polinomul are rădăcina raţională x_1, atunci $-x_1$ va fi, de ase-

menea, o rădăcină rațională și factorii liniari corespunzători pot fi strînși la un loc.

Fie $x^4+px^2+q=(x^2+\lambda_1 x+\mu_1)(x^2+\lambda_2 x+\mu_2)$. Atunci

$$\lambda_1+\lambda_2=0,$$
$$\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1=0,$$
$$\mu_1+\lambda_1\lambda_2+\mu_2=p,$$
$$\mu_1\mu_2=q.$$

Dacă $\lambda_1=0$, atunci și $\lambda_2=0$. În acest caz, pentru existența unor valori μ_1 și μ_2 raționale, este necesar și suficient ca discriminantul p^2-4q să fie pătratul unui număr rațional.

Fie $\lambda_1\neq 0$. Atunci $\lambda_2=-\lambda_1$; $\mu_2=\mu_1$ și mai departe

$$q=\mu_1^2;\quad 2\mu_1-p=\lambda_1^2.$$

Așadar, pentru ca polinomul x^4+px^2+q să fie reductibil, este necesar și suficient să fie îndeplinită una dintre următoarele două condiții:

a) p^2-4q să fie pătratul unui număr rațional;

b) q să fie pătratul unui număr rațional μ_1;

$2\mu_1-p$ să fie pătratul unui număr rațional λ_1.

678. Dacă $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+p_1x+q_1)\times$ $\times(x^2+p_2x+q_2)$, atunci putem scrie (întrucît $p_1+p_2=a$):

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left(\frac{p_1-p_2}{2}x+\frac{q_1-q_2}{2}\right)^2,$$

unde $\lambda=q_1+q_2$. De aici rezultă că ecuația de gradul al treilea auxiliară admite rădăcina rațională $\lambda=q_1+q_2$.

679. Fie $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, unde $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ au coeficienți întregi. Întrucît $f(a_i)=-1$, trebuie să avem: $\varphi(a_i)=1$, $\psi(a_i)=-1$, sau $\varphi(a_i)=-1$, $\psi(a_i)=1$ și, prin urmare,

$$\varphi(a_i)+\psi(a_i)=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Dacă nici unul dintre polinoamele $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ nu se reduce la o constantă, atunci gradul lui $\varphi(x)+\psi(x)$ este mai mic decît n, de unde rezultă că $\varphi(x)+\psi(x)\equiv 0$. Așadar, trebuie să avem $f(x)=-[\varphi(x)]^2$. Acest lucru este imposibil, întrucît primul coeficient al lui $f(x)$ este pozitiv.

680. Dacă $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, atunci $\varphi(a_i)=\psi(a_i)=\pm 1$, întrucît $f(a_i)=1$. Prin urmare, dacă φ și ψ nu se reduc la constante, $\varphi(x)=\psi(x)$ și

$$f(x)=[\varphi(x)]^2.$$

Acest lucru este posibil numai pentru n par.

Aşadar, unica descompunere posibilă este:

$$(x-a_1)\,(x-a_2)\,\ldots\,(x-a_n)+1=[\varphi(x)]^2.$$

De aici, considerînd pozitiv coeficientul termenului de gradul cel mai înalt al lui $\varphi(x)$ deducem că

$$\varphi(x)+1=(x-a_1)\,(x-a_3)\,\ldots\,(x-a_{n-1}),$$

$$\varphi(x)-1=(x-a_2)\,(x-a_4)\,\ldots\,(x-a_n).$$

(Pentru a avea dreptul să scriem aceste egalităţi, trebuie să schimbăm numerotarea numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$). În sfîrşit,

$$(x-a_1)\,(x-a_3)\,\ldots\,(x-a_{n-1})-(x-a_2)\,(x-a_4)\,\ldots\,(x-a_n)=2.$$

Să presupunem $a_1>a_3>\ldots>a_{n-1}$. Substituind în ultima egalitate $x=a_{2k}$, $k=1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, obţinem

$$(a_{2k}-a_1)\,(a_{2k}-a_3)\,\ldots\,(a_{2k}-a_{n-1})=2,$$

adică numărul 2 trebuie să se descompună în $\frac{n}{2}$ factori întregi, aşezaţi în ordine crescătoare în $\frac{n}{2}$ moduri. Acest lucru este posibil numai pentru $\frac{n}{2}=2$, $2=-2\cdot(-1)=1\cdot 2$ şi pentru $\frac{n}{2}=1$. Aceste două posibilităţi duc la cele două cazuri de reductibilitate ale polinomului $f(x)$, amintite în enunţul problemei.

681. Dacă polinomul $f(x)$ de gradul n, cu $n=2m$ sau $n=2m+1$ este reductibil, atunci gradul unuia dintre factorii săi $\varphi(x)$ nu depăşeşte pe m. Dacă $f(x)$ ia valorile ± 1 pentru mai mult decît $2m$ valori întregi ale variabilei, atunci $\varphi(x)$ ia, de asemenea, valorile ± 1 pentru aceleaşi valori ale variabilei. Printre aceste valori ale lui $\varphi(x)$ pot să existe mai mult decît m valori egale cu $+1$ sau -1, însă în acest caz $\varphi(x)=+1$ sau -1.

682. Polinomul $f(x)$ nu are rădăcini reale. Prin urmare, dacă $f(x)$ este reductibil, factorii săi $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ nu au rădăcini reale şi, de aceea, îşi păstrează semnul pentru valori reale ale lui x. Putem presupune că $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$ pentru toate valorile reale ale lui x. Întrucît $f(a_k)=1$, rezultă că $\varphi(a_k)=\psi(a_k)=1$, $k=1, 2, \ldots, n$. Dacă gradul lui $\varphi(x)$ [sau $\psi(x)$]

este mai mic decît n, atunci $\varphi(x)=1$ [sau $\psi(x)=1$] în mod identic. Prin urmare, gradele lui $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ sînt egale cu n. Atunci

$$\varphi(x)=1+\alpha(x-a_1)\ldots(x-a_n),\ \psi(x)=1+\beta(x-a_1)\ldots(x-a_n),$$

unde α şi β sînt numere întregi. Dar atunci

$$f(x)=(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2+1=1+(\alpha+\beta)(x-a_1)\ldots(x-a_n)+$$
$$+\alpha\beta(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2.$$

Compararea coeficienţilor lui x^{2n} şi x^n dă sistemul de ecuaţii $\alpha\beta=1$ şi $\alpha+\beta=0$ care nu admite rădăcini întregi. Prin urmare $f(x)$ este ireductibil.

683. Să presupunem că $f(x)$ ia valoarea 1 de un număr de ori mai mare decît 3. Atunci, $f(x)-1$ are cel puţin patru rădăcini întregi, adică

$$f(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)h(x),$$

unde a_1, a_2, a_3, a_4 şi coeficienţii polinomului $h(x)$ sînt numere întregi. Pentru valori întregi ale lui x, expresia $(x-a_1)(x-a_2)\times$ $\times(x-a_3)(x-a_4)$ este un produs de numere întregi, distincte. Două dintre aceste numere pot fi egale cu $+1$ şi -1; celelalte două sînt diferite de ±1. Prin urmare, produsul lor nu poate fi egal cu un număr prim, în particular cu -2. Aşadar, $f(x)-1\neq-2$ pentru valori întregi ale lui x şi, prin urmare, $f(x)\neq-1$.

684. Fie $f(x)=\varphi(x)\,\psi(x)$. Unul dintre factori, $\varphi(x)$, are gradul $\leqslant\frac{n}{2}$ şi ia valorile ±1 pentru mai mult decît $\frac{n}{2}$ valori întregi ale lui x. Întrucît $\frac{n}{2}\geqslant6$, atunci $+\varphi(x)$ sau $-\varphi(x)$ ia valoarea 1 de mai mult decît trei ori şi, în virtutea rezultatului problemei 683, nu poate lua valoarea -1. Aşadar, $\varphi(x)$ sau $-\varphi(x)$ ia valoarea $+1$ de mai mult decît $\frac{n}{2}$ ori şi, prin urmare, $\varphi(x)$ sau $-\varphi(x)$ este identic egal cu 1. Prin urmare, $f(x)$ este ireductibil.

Precizînd raţionamentul, putem demonstra valabilitatea rezultatului pentru $n\geqslant8$.

685. Fie

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1=\psi(x)\,w(x).$$

Unul dintre factori are gradul $\leqslant n$. În acest caz $\psi(x)$ ia valorile ± 1 pentru $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ și, ținînd seamă că $n \geqslant 7$, toate aceste valori ale lui $\psi(x)$ trebuie să aibă același semn. Prin urmare

$$\psi(x) = \pm 1 + \alpha(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) = \pm 1 + \alpha\varphi(x).$$

Dacă $\alpha \neq 0$, atunci $w(x)$ are, de asemenea, gradul n și $w(x) = \pm 1 + \beta\varphi(x)$. Egalitatea

$$a[\varphi(x)]^2 + b\varphi(x) + 1 = (\pm 1 + \alpha\varphi(x))(\pm 1 + \beta\varphi(x))$$

este, însă, imposibilă, întrucît polinomul $ax^2 + bx + 1$ este prin ipoteză ireductibil.

686. a) $f(x) = a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0 x^n}\right)$.

Fie $\operatorname{Max}\left|\frac{a_k}{a_0}\right| = A$. Atunci, pentru $|x| > 1$

$$|f(x)| \geqslant |a_0 x^n| \left[1 - \frac{A}{|x| - 1}\right] = |a_0 x^n| \frac{|x| - 1 - A}{|x| - 1} > 0$$

pentru $|x| > 1 + A$.

b) $\frac{1}{\rho^n} f(x) = a_0 \left(\frac{x}{\rho}\right)^n + \frac{a_1}{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-1} + \frac{a_2}{\rho^2}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{\rho^n}$.

În virtutea lui a) avem pentru toate rădăcinile

$$\frac{|x|}{\rho} \leqslant 1 + \operatorname{Max}\left|\frac{a_k}{a_0 \rho^k}\right|, \text{ de unde } |x| \leqslant \rho + \operatorname{Max}\left|\frac{a_k}{a_0 \rho^{k-1}}\right|.$$

c) Să punem $\rho = \operatorname{Max}\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$. Atunci

$$\left|\frac{a_k}{a_0}\right| \leqslant \rho^k; \quad \left|\frac{a_k}{a_0 \rho^{k-1}}\right| \leqslant \rho; \quad \operatorname{Max}\left|\frac{a_k}{a_0 \rho^{k-1}}\right| \leqslant \rho.$$

Prin urmare, modulele tuturor rădăcinilor nu depășesc

$$\rho + \rho = 2\rho = 2 \operatorname{Max}\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}.$$

d) Să punem $\rho = \operatorname{Max} \sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$. Atunci $|a_k| \leqslant |a_1|\rho^{k-1}$, $\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right| \leqslant$

$\leqslant \left|\frac{a_1}{a_0}\right|$. Prin urmare, rădăcinile nu depășesc în modul

$$\rho + \left|\frac{a_1}{a_0}\right| = \left|\frac{a_1}{a_0}\right| + \operatorname{Max} \sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}.$$

687. Fie $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,
$\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$;
$0 < b_0 \leqslant |a_0|$, $b_1 \geqslant |a_1|, \ldots, b_n \geqslant |a_n|$. Evident că $|f(x)| \geqslant \varphi(|x|)$.

Mai departe, $\varphi(x) = b_0x^n\left(1 - \frac{b_1}{b_0x} - \frac{b_2}{b_0x^2} - \ldots - \frac{b_n}{b_0x^n}\right)$.

Expresia aflată între paranteze crește dela $-\infty$ la 1, cînd x variază între 0 și $+\infty$.

Prin urmare, $\varphi(x)$ are o singură rădăcină pozitivă ξ și pentru $x > \xi$, $\varphi(x) > 0$. În virtutea acestui fapt, pentru $|x| > \xi$ avem $|f(x)| \geqslant \varphi(|x|) > 0$, de unde rezultă că modulele tuturor rădăcinilor polinomului $f(x)$ nu depășesc pe ξ.

688. a) Fie $A = \operatorname{Max}\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$.

Evident că

$$|f(x)| \geqslant |a_0x^n|\left(1 - \frac{A}{|x|^r} - \frac{A}{|x|^{r+1}} - \ldots - \frac{A}{|x|^n}\right),$$

de unde, pentru $|x| > 1$,

$$|f(x)| > |a_0x^n|\left(1 - \frac{A}{|x|^{r-1}(|x|-1)}\right) =$$

$$= \frac{|a_0x^{n-r+1}|}{|x|-1}[|x|^{r-1}(|x|-1) - A] > \frac{|a_0||x|^{n-r+1}}{|x|-1}[(|x|-1)^r - A].$$

Pentru $|x| > 1 + \sqrt[r]{A}$, $|f(x)| > 0$.

b) $\frac{1}{\rho^n} f(x) = a_0\left(\frac{x}{\rho}\right)^n + \frac{a_r}{\rho^r}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-r} + \ldots + \frac{a_n}{\rho^n}$.

În virtutea lui a), pentru toate rădăcinile lui $f(x)$ avem:

$$\left|\frac{x}{\rho}\right| < 1 + \sqrt[r]{\operatorname{Max}\left|\frac{a_k}{a_0\rho^k}\right|}, \text{ de unde } |x| < \rho + \sqrt[r]{\operatorname{Max}\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}.$$

c) Să punem $\rho = \operatorname{Max}\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$. Atunci $|a_k| \leqslant |a_r|\,\rho^{k-r}$, şi modulele tuturor rădăcinilor polinomului nu depăşesc numărul

$$\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|} + \rho = \sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|} + \operatorname{Max}\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}.$$

689. Pentru rădăcinile negative ale polinomului, afirmaţia este evidentă. Pentru fixarea ideilor, să presupunem $a_0 > 0$ şi să notăm $\varphi(x) = a_0x^n - b_1x^{n-1} - b_2x^{n-2} - \ldots - b_n$, unde $b_k = 0$ pentru $a_k > 0$ şi $b_k = -a_k$ pentru $a_k < 0$. Atunci, pentru x pozitiv avem evident:

$$f(x) \geqslant \varphi(x).$$

Pe de altă parte, $\varphi(x)$ are o singură rădăcină pozitivă ξ (v. problema 687) şi pentru $x > \xi$, $\varphi(x) > 0$. Prin urmare, pentru $x > \xi$, $f(x) \geqslant \varphi(x) > 0$.

690. Rezultă imediat din 688, 689, 686 c).

692. Dezvoltînd pe $f(x)$ după puterile lui $x - a$, obţinem pentru $x \geqslant a$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n > 0.$$

693. Marginea superioară a rădăcinilor se găseşte folosind rezultatele problemelor 690, 692. Pentru determinarea celei inferioare, înlocuim x cu $-x$:

a) $0 < x_i < 3$; b) $0 < x_i < 1$; c) $-11 < x_i < 11$; d) $-6 < x_i < 2$.

694. a) $f = x^3 - 3x - 1$; $f_1 = x^2 - 1$; $f_2 = 2x + 1$; $f_3 = +1$.

Trei rădăcini reale în intervalele $(-2, -1)$; $(-1, 0)$; $(1,2)$.

b) $f = x^3 + x^2 - 2x - 1$; $f_1 = 3x^2 + 2x - 2$; $f_2 = 2x + 1$; $f_3 = +1$.
Trei rădăcini reale în intervalele $(-2, -1)$; $(-1, 0)$; $(1, 2)$.

c) $f = x^3 - 7x + 7$; $f_1 = 3x^2 - 7$; $f_2 = 2x - 3$; $f_3 = +1$.
Trei rădăcini reale în intervalele $(-4, -3)$; $(1, {}^3/_2)$; $({}^3/_2, 2)$.

d) $f = x^3 - x + 5$; $f_1 = 3x^2 - 1$; $f_2 = 2x - 15$; $f_3 = -1$. O rădăcină reală în intervalul $(-2, -1)$.

e) $f = x^3 + 3x - 5$; $f_1 = x^2 + 1$. O rădăcină reală în intervalul $(1, 2)$.

695. a) $f = x^4 - 12x^2 - 16x - 4$; $f_1 = x^3 - 6x - 4$; $f_2 = 3x^2 + 6x + 2$; $f_3 = x + 1$; $f_4 = 1$. Patru rădăcini reale în intervalele $(-3, -2)$; $(-2, -1)$; $(-1{,}0)$; $(4, 5)$.

b) $f = x^4 - x - 1$; $f_1 = 4x^3 - 1$; $f_2 = 3x + 4$; $f_3 = +1$. Două rădăcini reale în intervalele $(-1, 0)$ şi $(1, 2)$.

c) $f = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1$; $f_1 = x^3 - 3x^2 + 2x$; $f_2 = 2x^2 - 4x + 1$; $f_3 = x - 1$; $f_4 = 1$. Patru rădăcini reale în intervalele $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 3)$.

d) $f = x^4 + x^2 - 1$; $f_1 = 2x^3 + x$; $f_2 = -x^2 + 2$; $f_3 = -x$; $f_4 = -1$. Două rădăcini reale în intervalele $(-1, 0)$ şi $(0, 1)$.

e) $f = x^4 + 4x^3 - 12x + 9$; $f_1 = x^3 + 3x^2 - 3$; $f_2 = x^2 + 3x - 4$; $f_3 = -4x + 3$; $f_4 = 1$. Nu are rădăcini reale.

696. a) $f = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5$; $f_1 = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 5$; $f_2 = 22x^2 - 22x - 45$; $f_3 = 2x - 1$; $f_4 = 1$. Patru rădăcini reale în intervalele $(1, 2)$; $(2, 3)$; $(-1, 0)$; $(-2, -1)$.

b) $f = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$; $f_1 = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$; $f_2 = x^2 + 5x - 3$; $f_3 = -9x + 5$; $f_4 = -1$. Două rădăcini reale în intervalele $(0, 1)$; $(1, 2)$.

c) $f = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$; $f_1 = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 1$; $f_2 = 9x^2 - 3x - 5$; $f_3 = 9x + 1$; $f_4 = +1$. Patru rădăcini în intervalele $(-2, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(2, 3)$.

d) $f = x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$; $f_1 = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$; $f_2 = -5x^2 + 10x + 17$; $f_3 = -8x - 5$; $f_4 = -1$. Două rădăcini reale în intervalele $(1, 2)$; $(-1, 0)$.

e) $f = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 1$; $f_1 = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$, $f_2 = 5x^2 - x - 2$; $f_3 = 18x + 1$; $f_4 = +1$. Patru rădăcini reale în intervalele $(-2, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(4, 5)$.

697. a) $f = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1$; $f_1 = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4$; $f_2 = 17x^2 - 17x - 8$; $f_3 = 2x - 1$; $f_4 = 1$. Patru rădăcini reale în intervalele $(-3, -2)$; $(-1, 0)$; $(1, 2)$; $(3, 4)$.

b) $f = x^4 - 4x^2 + x + 1$; $f_1 = 4x^3 - 8x + 1$; $f_2 = 8x^2 - 3x - 4$; $f_3 = 87x - 28$; $f_4 = +1$. Patru rădăcini reale în intervalele $(-3, -2)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 2)$.

c) $f = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$; $f_1 = 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1$; $f_2 = 11x^2 + 14x - 15$; $f_3 = -8x + 7$; $f_4 = -1$. Două rădăcini reale în intervalele $(0, 1)$ și $(1, 2)$.

d) $f = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 8$; $f_1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 3$; $f_2 = -x^2 + 5x - 5$; $f_3 = -9x + 13$; $f_4 = -1$. Două rădăcini reale $x_1 = 2$; $1 < x_2 < 2$.

e) $f = x^4 - x^3 - 2x + 1$; $f_1 = 4x^3 - 3x^2 - 2$; $f_2 = 3x^2 + 24x - 14$; $f_3 = -56x + 31$; $f_4 = -1$. Două rădăcini reale, cuprinse în intervalele $(0, 1)$ și $(1, 2)$.

698. a) $f = x^4 - 6x^2 - 4x + 2$; $f_1 = x^3 - 3x - 1$; $f_2 = 3x^2 + 3x - 2$; $f_3 = 4x + 5$; $f_4 = 1$. Patru rădăcini reale cuprinse în intervalele $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)(0,1)$; $(2,3)$.

b) $f = 4x^4 - 12x^2 + 8x - 1$; $f_1 = 2x^3 - 3x + 1$; $f_2 = 6x^2 - 6x + 1$; $f_3 = 2x - 1$; $f_4 = 1$. Patru rădăcini reale cuprinse în intervalele $(-3, -2)$; $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ și $(1, 2)$.

c) $f = 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 1$; $f_1 = 2x^3 + 6x^2 + 3x$; $f_2 = 9x^2 + 9x + 2$; $f_3 = 13x + 8$; $f_3 = 1$. Patru rădăcini reale în intervalele $(-4, -3)$; $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$; $(0, 1)$.

d) $f = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$; $f_1 = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$; $f_2 = 7x^2 - 8x - 4$; $f_3 = 4x - 5$; $f_4 = 1$. Patru rădăcini reale cuprinse în intervalele $\left(1, \frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$; $(-2, -1)$; $(-1, 0)$.

e) $f = 9x^4 - 126x^2 - 252x - 140$; $f_1 = x^3 - 7x - 7$; $f_2 = 9x^2 + 27x + 20$; $f_3 = 2x + 3$; $f_4 = 1$. Patru rădăcini reale în intervalele $(4, 5)$; $\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$; $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$; $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$.

699. a) $f = 2x^5 - 10x^3 + 10x - 3$; $f_1 = x^4 - 3x^2 + 1$; $f_2 = 4x^3 - 8x + 3$; $f_3 = 4x^2 + 3x - 4$; $f_4 = x$; $f_5 = 1$. Cinci

rădăcini reale cuprinse în intervalele $\left(-2, -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}, -1\right); \left(0, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right); (1, 2)$.

b) $f = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 3x + 1$; $f_1 = 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 2x - 1$; $f_2 = 3x^4 - 6x^3 - x^2 + 4x - 1$; $f_3 = 4x^3 - 6x^2 + 1$; $f_4 = 26x^2 - 26x + 5$; $f_5 = 2x - 1$; $f_6 = 1$.

Șase rădăcini reale cuprinse în intervalele $(-2, -1); (-1, 0); \left(0, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right); (1, 2); (2, 3)$.

c) $f = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$; $f_1 = 5x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 6x + 3$; $f_2 = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 2$; $f_3 = 3x^2 + 2x - 2$; $f_4 = 2x + 1$; $f_5 = 1$. Cinci rădăcini reale cuprinse în intervalele $\left(-2, -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}, -1\right); (-1, 0); (0, 1); (1, 2)$.

d) $f = x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2$; $f_1 = x^4 - 3x^2 - 4x$; $f_2 = x^3 + 3x^2 - 1$; $f_3 = -2x^2 + x + 1$; $f_4 = -3x - 1$; $f_5 = -1$. Trei rădăcini reale cuprinse în intervalele $(-1, 0); (0, 1); (2, 3)$.

700. a) $f = x^4 + 4x^2 - 1$; $f_1 = x$; $f_2 = 1$. Două rădăcini reale cuprinse în intervalele $(-1, 0)$ și $(0, 1)$.

b) $f = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; $f_1 = 2x - 3$; $f_2 = 1$. Două rădăcini reale în intervalele $(0, 1)$ și $(2, 3)$.

c) $f = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 1$; $f_1 = 2x - 3$; $f_2 = 1$. Două rădăcini reale în intervalele $(0, 1)$ și $(2, 3)$.

d) $f = x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3$; $f_1 = x^2 + 4x - 1$; $f_2 = 5x - 1$; $f_3 = 1$. Trei rădăcini reale cuprinse în intervalele $(0, 1); (-1, 0); (-6, -5)$.

701. Șirul lui Șturm este format din polinoamele $x^3 + px + q$; $3x^2 + p$; $-2px - 3q$; $-4p^3 - 27q^2$. Dacă $-4p^3 - 27q^2 > 0$, atunci $p < 0$. Toți coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt al polinoamelor lui Șturm sînt pozitivi și, de aceea, toate rădăcinile lui $x^3 + px + q$ sînt reale. Dacă $-4p^3 - 27q^2 < 0$, atunci, independent de semnul lui p, șirul lui Șturm are două variații de semn la $-\infty$ și o variație de semn la $+\infty$. În acest caz, $x^3 + px + q$ are o singură rădăcină reală.

702. Şirul lui Şturm este format din polinoamele $x^n + px + q$, $nx^{n-1} + p$, $-(n-1)px - nq$, $-p - n\left(\frac{-nq}{(n-1)p}\right)^{n-1}$.

Pentru n impar, semnul ultimei expresii coincide cu semnul lui $\Delta = -(n-1)^{n-1}p^n - n^n q^{n-1}$. Dacă $\Delta > 0$, atunci este necesar ca $p < 0$. În acest caz, polinomul are trei rădăcini reale. Dacă $\Delta < 0$, atunci polinomul are o singură rădăcină reală, independent de semnul lui p.

Pentru n par, semnul ultimei expresii din şirul lui Şturm coincide cu semnul lui $-p\Delta$, unde $\Delta = (n-1)^{n-1}p^n - n^n q^{n-1}$. Distribuţia semnelor în şirul lui Şturm pentru diferitele combinaţii ale lui p şi Δ este dată în tabela următoare:

			f	f_1	f_2	f_3
1. $p > 0$;	$\Delta > 0$	$-\infty$	+	−	+	−
		$+\infty$	+	+	−	−
2. $p < 0$;	$\Delta > 0$	$-\infty$	+	−	−	+
		$+\infty$	+	+	+	+
3. $p > 0$;	$\Delta < 0$	$-\infty$	+	−	+	+
		$+\infty$	+	+	−	+
4. $p < 0$;	$\Delta < 0$	$-\infty$	+	−	−	−
		$+\infty$	+	+	+	−

Din examinarea acestei tabele rezultă că pentru $\Delta > 0$ polinomul are două rădăcini reale, în timp ce pentru $\Delta < 0$ nu există rădăcini reale.

703. Şirul lui Şturm este format din polinoamele: $f = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b$; $f_1 = x^4 - 3ax^2 + a^2$; $f_2 = ax^3 - 2a^2x - b$.; $f_3 = a(a^2x^2 - bx - a^3)$; $f_4 = a(a^5 - b^2)x$; $f_5 = 1$.

Dacă $\Delta = a^5 - b^2 > 0$, atunci $a > 0$ şi toţi coeficienţii termenilor de gradul cel mai înalt ai polinoamelor lui Şturm sînt pozitivi. În acest caz, toate cele cinci rădăcini ale polinomului f sînt reale. Dacă $\Delta < 0$, atunci, în funcţie de semnul lui a, distribuţia semnelor este următoarea:

		f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$a > 0$	$-\infty$	−	+	−	+	+	+
	$+\infty$	+	+	+	+	−	+
$a < 0$	$-\infty$	−	+	+	−	−	+
	$+\infty$	+	+	−	−	+	+

Prin urmare, pentru $\Delta < 0$ polinomul f are o singură rădăcină reală.

704. Fie f_λ și $f_{\lambda+1}$ două polinoame vecine din șirul „complet" al lui Șturm. Dacă coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt au același semn, atunci valorile lor pentru $+\infty$ nu dau variație de semn, iar valorile lor pentru $-\infty$ dau o variație de semn, deoarece gradul unuia dintre polinoame este par, iar gradul celuilalt este impar. Dacă coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt au semne, diferite atunci valorile lui f_λ și $f_{\lambda+1}$ pentru $+\infty$ dau o variație de semn, iar pentru $-\infty$ nu dau nici o variație de semn. De aceea, notînd cu ν_1 și ν_2 numărul variațiilor din șirul lui Șturm pentru $-\infty$ și $+\infty$, obținem $\nu_1 + \nu_2 = n$. Pe de altă parte, $\nu_1 - \nu_2$ este egal cu numărul N al rădăcinilor reale ale polinomului. Prin urmare $\nu_2 = \frac{n-N}{2}$, ceea ce era de demonstrat.

705. Se demonstrează, ca teorema lui Șturm, cu singura deosebire că trebuie să urmărim creșterea (iar nu descreșterea) numărului variațiilor de semn cu o unitate, atunci cînd se trece printr-o rădăcină a polinomului inițial.

706. Șirul de polinoame construit este șirul lui Șturm pentru intervalul $x_0 \leqslant x < +\infty$ și satisface condițiile problemei 705, pentru intervalul $-\infty < x \leqslant x_0$. Prin urmare, numărul rădăcinilor lui f în intervalul (x_0, ∞) este egal cu $\nu(x_0) - \nu(+\infty)$, iar numărul rădăcinilor lui f în intervalul $(-\infty, x_0)$ este egal cu $\nu(x_0) - \nu(-\infty)$, unde ν este numărul variațiilor de semn ale valorilor corespunzătoare ale polinoamelor.

Numărul total de rădăcini reale este egal cu

$$2\nu(x_0) - \nu(+\infty) - \nu(-\infty).$$

707. Aplicînd teorema lui Euler polinomului scris astfel:

$$P_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n} = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^{n-1}}$$

obținem

$$P_n = (-1)^{n-1} e^{\frac{x^2}{2}} \left(x \frac{d^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-1}} + (n-1) \frac{d^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-2}} \right),$$

de unde relația de recurență

$$P_n = xP_{n-1} - (n-1)\, P_{n-2}.$$

Pe de altă parte, derivînd egalitatea care defineşte pe P_{n-1}, obţinem

$$P'_{n-1} = (-1)^{n-1} xe^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-1}} + (-1)^{n-1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n},$$

de unde

$$P'_{n-1} = x P_{n-1} - P_n.$$

Comparînd cu formula precedentă, obţinem $P'_{n-1} = (n-1) \times P_{n-2}$ şi, prin urmare, $P'_n = nP_{n-1}$.

Din formulele de mai sus rezultă că şirul P_n, P_{n-1}, ..., P_1, $P_0 = 1$ este un şir al lui Şturm, pentru polinoamele P_n, deoarece P_{n-1} se deosebeşte de P'_n numai prin factorul n, iar $P_{\lambda-1}$ este restul luat cu semnul schimbat din împărţirea lui $P_{\lambda+1}$ cu P_λ, abstracţie făcînd de un factor pozitiv.

Toţi coeficienţii termenilor de gradul cel mai înalt ai polinoamelor P_n sînt egali cu $+1$. Prin urmare, toate rădăcinile lui P_n sînt reale.

708. Derivînd egalitatea care defineşte pe P_n, obţinem:

$$P'_n = (-1)^n e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n} + (-1)^n e^x \frac{d^n (nx^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x})}{dx^n},$$

de unde

$$P'_n = (-1)^n ne^x \frac{d^n x^{n-1} e^{-x}}{dx^n}.$$

Mai departe,

$$P_n = (-1)^n e^x \frac{d^n (x \cdot x^{n-1} e^{-x})}{dx^n} =$$

$$= (-1)^n e^x \left[x \frac{d^n x^{n-1} e^{-x})}{dx^n} + n \frac{d^{n-1} x^{n-1} e^{-x}}{dx^{n-1}} \right] = \frac{x}{n} P'_n - nP_{n-1},$$

de unde $xP'_n = nP_n + n^2 P_{n-1}$.

Pe de altă parte,

$$P'_n = (-1)^n ne^x \frac{d^{n-1} [(n-1)x^{n-2} e^{-x} - x^{n-1} e^{-x}]}{dx^{n-1}},$$

de unde $P_n' = -nP_{n-1} + nP_{n-1}$. Înmulțind cu x și substituind în loc de xP_n' și xP_{n-1}' expresiile lor în funcție de P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, obținem

$$P_n = (x - 2n + 1)\, P_{n-1} - (n-1)^2\, P_{n-2}.$$

Din aceste relații se vede că polinoamele P_n nu se anulează simultan și dacă $P_{n-1} = 0$, atunci P_n și P_{n-2} au semne diferite. Mai departe, din $\frac{P_{n-1}}{P_n} = -\frac{1}{n} - \frac{xP_n'}{P_n}$ rezultă că $\frac{P_{n-1}}{P_n}$ își schimbă semnul dela $-$ la $+$, cînd se trece printr-o rădăcină pozitivă a lui P_n. Astfel, șirul $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1, P_0 = 1$ este șirul lui Șturm pentru P_n în intervalul $(0, \infty)$. Coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt ai tuturor polinoamelor P_n sînt egali cu 1. $P_n(0) = (-1)^n n!$. Prin urmare, $v(0) - v(+\infty) = n$, adică P_n are n rădăcini pozitive.

709. $E_n' = E_{n-1}$. Mai departe, $E_n = E_{n-1} - \left(-\frac{x^n}{n!}\right)$.

De aceea, polinoamele E_n, E_{n-1} și $-\frac{x^n}{n!}$ formează un șir al lui Șturm pentru E_n în intervalul $(-\infty, -\varepsilon)$, unde ε este un număr pozitiv oricît de mic.

Distribuția semnelor este dată de tabela următoare:

$-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^{n-1}$
$-\varepsilon$	$+$	$+$	$(-1)^{n-1}$

Prin urmare, pentru n par, E_n nu are rădăcini negative, iar pentru n impar, polinomul E_n are o singură rădăcină negativă. Pe de altă parte, pentru $x \geqslant 0$, polinomul $E_n(x) > 0$.

710. Să transformăm cu ajutorul formulei lui Euler identitatea

$$\frac{d^{n+1}\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}} = \frac{d^n\left[(2x-1)\, e^{\frac{1}{x}}\right]}{dx^n}.$$

Obținem

$$x^2 \frac{d^{n+1} e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n+1}} + 2(n+1)\, x \frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} + (n+1)\, n \frac{d^{n-1} e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n-1}} =$$

$$= (2x-1) \frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} + 2n \frac{d^{n-1} e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n-1}},$$

de unde $P_n = (2nx+1)P_{n-1} - n(n-1)P_{n-2}x^2$. Pe de altă parte, derivînd egalitatea care defineşte pe P_{n-1}, obţinem

$$P_n = (2nx+1)P'_n - x^2P'_{n-1}.$$

Comparînd rezultatele, vedem că $P'_{n-1} = n(n-1)P_{n-2}$ şi, prin urmare, $P'_n = (n+1)nP_{n-1}$. În virtutea relaţiilor stabilite, şirul de polinoame P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, ..., $P_0=1$ formează un şir Şturm pentru P_n. Coeficienţii termenilor de gradul cel mai înalt ai tuturor polinoamelor P_n sînt pozitivi. Prin urmare, toate rădăcinile lui P_n sînt reale.

711. Evaluînd în două moduri identitatea:

$$\frac{d^n\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}{dx^n} = \frac{d^n\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{dx^n},$$

obţinem

$$P_n - 2xP_{n-1} + (x^2+1)P_{n-2} = 0.$$

Derivînd egalitatea care defineşte pe P_{n-1}, obţinem $P'_n = 2xP_{n-1} - \frac{x^2+1}{n}P'_{n-1}$, de unde $P'_{n-1} = nP_{n-2}$ şi, prin urmare, $P'_n = (n+1)P_{n-1}$.

Din relaţiile de mai sus rezultă că P_n, P_{n-1}, ..., $P_0=1$ formează un şir Şturm pentru P_n. Toţi coeficienţii termenilor de gradul cel mai înalt ai şirului sînt pozitivi, prin urmare, toate rădăcinile lui P_n sînt reale.

Determinarea rădăcinilor se face uşor şi direct. In adevăr,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right),$$

de unde obţinem

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}[(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}].$$

Se vede uşor că rădăcinile lui P_n sînt $\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

712. Dezvoltînd după formula lui Euler identitatea următoare:

$$\frac{d^n\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^{n-1}},$$

obţinem

$$P_n - (2n-1)\,xP_{n-1} + (n-1)^2(x^2+1)P_{n-2} = 0.$$

Derivînd egalitatea care defineşte pe P_{n-1}, obţinem

$$P_n - (2n-1)\,xP_{n-1} + (x^2+1)\,P'_{n-1} = 0,$$

de unde

$$P'_{n-1} = (n-1)^2 P_{n-2} \text{ şi } P'_n = n^2 P_{n-1}.$$

Din aceste relaţii rezultă că $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0 = 1$ formează un şir Şturm.

Deoarece coeficienţii termenilor de gradul cel mai înalt sînt pozitivi, toate rădăcinile lui P_n sînt reale.

713. Funcţiile $F(x), F'(x)$ şi $[f'(x)]^2$ formează un şir Şturm pentru F. Coeficienţii termenilor de gradul cel mai înalt ai acestui şir $3a_0^2$, $12a_0^2$ şi $9a_0^2$ sînt pozitivi. Prin urmare, numărul variaţiilor de semn pierdute, cînd x variază dela $-\infty$ la $+\infty$, este egal cu 2.

Dacă f are o rădăcină dublă, atunci F are o rădăcină triplă şi una simplă. Dacă f are o rădăcină triplă. atunci F are o rădăcină cvadruplă.

714. Dacă unul dintre polinoamele şirului Şturm are o rădăcină multiplă x_0 sau o rădăcină complexă α, atunci acest polinom poate fi înlocuit printr-un polinom de grad mai mic, împărţindu-l cu cantitatea pozitivă $(x-x_0)^2$ sau $(x-\alpha)\,(x-\alpha')$. Polinoamele următoare pot fi înlocuite prin resturile din algoritmul lui Euclid, luate cu semnul schimbat. determinate pentru polinomul înlocuit şi pentru cel precedent. După aceasta, numărul variaţiilor de semn pentru $x = -\infty$ va deveni $\leqslant n-2$, unde n este gradul polinomului. Prin urmare, numărul rădăcinilor reale este, de asemenea, $\leqslant n-2$.

715. Fie $F(x) = (x^2-1)^n$. $F(x)$ admite pe -1 şi $+1$ ca rădăcini multiple de ordinul n. $F'(x)$ admite -1 şi $+1$ ca rădăcini multiple de ordinul $n-1$ şi, după teorema lui Rolle, mai are o rădăcină în intervalul $(-1, +1)$. $F''(x)$ admite -1 şi $+1$ ca rădăcini multiple de ordinul $n-2$ şi două rădăcini în intervalul deschis -1, $+1$, etc. $F^n(x) = P_n(x)$ are n rădăcini în intervalul deschis $(-1, 1)$.

716. Fie $x_1, \ldots, x_k$ rădăcinile distincte ale lui $f(x)$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ordinele lor de multiplicitate respective. Presupunem $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_k$. Funcţia $\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ este continuă în intervalele deschise $(-\infty, x_1)$; $(x_1\ x_2), \ldots, (x_{k-1}, x_k)$

şi $(x_k, +\infty)$ şi variază de la 0 la $-\infty$ în intervalul $(-\infty, x_1)$, de la $+\infty$ la $-\infty$ în fiecare dintre intervalele (x_{i-1}, x_i) şi de la $+\infty$ la 0 în intervalul (x_k, ∞), deoarece pentru $x \to x_i$, $\varphi(x) \to \infty$ şi cînd trece prin x_i îşi schimbă semnul din $-$ în $+$.

Prin urmare, $\varphi(x) + \lambda$ are o rădăcină în fiecare dintre intervalele (x_{i-1}, x_i) şi, înafară de aceasta, pentru $\lambda > 0$, o rădăcină în intervalul $(-\infty, x_1)$, iar pentru $\lambda < 0$, o rădăcină cuprinsă în intervalul $(x_k, +\infty)$.

Aşadar, $\varphi(x) + \lambda$ şi, prin urmare, $f(x)[(\varphi(x) + \lambda)] = \lambda f(x) + f'(x)$ are k rădăcini diferite de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pentru $\lambda \neq 0$, sau $k-1$ rădăcini diferite de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pentru $\lambda = 0$. Afară de aceasta, $\lambda f(x) + f'(x)$ admite $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ca rădăcini multiple de ordine, respectiv, $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_k - 1$. Astfel, numărul total de rădăcini reale (ţinînd seama de multiplicitate) ale polinomului $\lambda f(x) + f'(x)$ este egal cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ pentru $\lambda \neq 0$ şi cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k - 1$ pentru $\lambda = 0$, adică este egal cu gradul polinomului $\lambda f(x) + f'(x)$.

717. Fie $g(x) = a_0(x + \lambda_1)(x + \lambda_2) \ldots (x + \lambda_n)$; $F_0(x) = a_0 f(x)$; $F_1(x) = F_0(x) + \lambda_1 F(x) = a_0 f(x) + a_0 \lambda_1 f'(x)$; $F_2(x) = F_1(x) + \lambda_2 F_1(x) = a_0 f(x) + a_0(\lambda_1 + \lambda_2) f'(x) + a_0 \lambda_1 \lambda_2 f''(x)$ etc.
Atunci, $F_n(x) = F_{n-1}(x) + \lambda_n F_{n-1}(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \ldots + a_n f^{(n)}(x)$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt coeficienţii lui g. În virtutea rezultatului problemei 715, toate rădăcinile tuturor polinoamelor $F_0, F_1, \ldots, F_n$ sînt reale.

718. $a_0 x^n + a_1 m x^{n-1} + \ldots + m(m-1) \ldots (m-n+1) a_n = [a_0 x^m + a_1 (x^m)' + \ldots + a_n (x^m)^{(n)}] x^{n-m}$, iar toate rădăcinile lui x^m sînt reale.

719. Polinomul $a_n x^n + n a_{n-1} x^{n-1} + n(n-1) a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 n!$ are numai rădăcini reale. Prin urmare, toate rădăcinile lui $a_0 n! x^n + a_1 n(n-1) \ldots 2x^{n-1} + \ldots + n a_{n-1} x + a_n$ sînt reale. Aplicînd încă o dată rezultatul problemei 718, deducem că toate rădăcinile polinomului $a_0 n! x^n + a_1 n \cdot n(n-1) \ldots 2x^{n-1} + a_2 n(n-1) \cdot n(n-1) \ldots 3x^{n-2} + \ldots + a_n n!$ sînt reale. Ne mai rămîne doar să împărţim cu $n!$.

720. Toate rădăcinile polinomului $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + x^n$ sînt reale. Mai trebuie numai să aplicăm rezultatul problemei 719.

721. Polinomul $f(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} \ldots - 1$ admite rădăcina reală 1. Mai departe, fie $F(x) = (x-1) f(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Atunci $F'(x) = n(n+1)(x-1)x^{n-1}$. Pentru n impar,

polinomul $F(x)$ are un singur minim pentru $x=1$ și, prin urmare, nu are rădăcini înafară de rădăcina dublă $x=1$. Pentru n par, polinomul $F(x)$ crește de la $+\infty$ la 1 pentru $-\infty < x \leqslant 0$, descrește de la 1 la 0 pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$ și crește de la 0 la ∞ pentru $1 \leqslant x < \infty$. De aceea, $F(x)$ are, în acest caz, o singură rădăcină în afară de rădăcina $x=1$.

722. Derivata polinomului care ne interesează este pozitivă pentru toate valorile reale ale lui x. Prin urmare, polinomul are o singură rădăcină reală.

723. Fie $a<b<c$; $f(-\infty)<0$; $f(a)=B^2(b-a)+C^2(c-a)>0$; $f(c) = -A^2(c-a) - B^2(c-b) < 0$; $f(+\infty) > 0$. Prin urmare, f are rădăcini reale în intervalele $(-\infty, a)$; (a, c); $c, +\infty)$.

724. $$\varphi(a+bi) = B + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^2}{a+bi-a_k} = B + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^2(a-a_k-bi)}{(a-a_k)^2+b^2};$$

$$\Im(\varphi(a+bi)) = -b\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^2}{(a-a_k)^2+b^2} \neq 0 \text{ pentru } b \neq 0,$$ deoarece toți termenii de sub semnul sumă sînt pozitivi. Prin urmare, $\varphi(a+bi) \neq 0$ pentru $b \neq 0$. Același rezultat poate fi obținut și pe baza faptului că $\varphi(x)$ variază de la $+\infty$ la $-\infty$, cînd x variază de la a_i la a_{i+1}; $\varphi(x)$ variază de la 0 la $-\infty$ pentru $-\infty < x < a_1$; $\varphi(x)$ variază de la $+\infty$ la 0 pentru $a_n < x < \infty$. Se presupune că

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

725. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-x_k}$, unde x_k sînt rădăcinile polinomului $f(x)$.

Prin urmare,

$$[f'(x)]^2 - f(x)f''(x) = [f(x)]^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-x_k)^2} > 0$$

pentru toate valorile reale ale lui x.

726. Fie $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ rădăcinile polinomului $f(x)$, iar $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ rădăcinile polinomului $\varphi(x)$.

Cînd condițiile problemei sînt îndeplinite, $m=n$, $n-1$ sau $n+1$. Fără a restrînge generalitatea problemei, putem considera $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < x_n$ sau $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots$

$<y_{n-1}<x_n<y_n$. Vom presupune $\lambda\neq 0$. Să scriem ecuația sub forma

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=-\frac{\mu}{\lambda}.$$

Dacă $m=n$, atunci $\psi(x)$ variază astfel:

de la $\frac{a_0}{b_0}$ la $-\infty$ pentru $-\infty<x<y_1$, anulîndu-se pentru $x=x_1$; de la $+\infty$ la $-\infty$ pentru $y_k<x<y_{k+1}$, anulîndu-se pentru $x=x_{k+1}$; de la $+\infty$ la $\frac{a_0}{b_0}$ pentru $y_n<x<+\infty$.

Aici a_0 și b_0 sînt coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt ai lui $f(x)$ și $\varphi(x)$, pe care îi considerăm pozitivi.

Ținînd seamă că $\psi(x)$ este continuă în fiecare dintre intervalele considerate, ecuația $\psi(x)=-\frac{\mu}{\lambda}$ admite n rădăcini reale dacă $-\frac{\mu}{\lambda}\neq\frac{a_0}{b_0}$, și $n-1$ rădăcini reale dacă $-\frac{\mu}{\lambda}=\frac{a_0}{b_0}$.

Astfel, numărul rădăcinilor reale ale ecuației $\lambda f(x)+\mu\varphi(x)$ este egal cu gradul său.

În mod analog, se studiază și cazul $m=n-1$.

727. Rădăcinile lui $f(x)$ și $\varphi(x)$ sînt, neapărat, toate reale, deoarece $f(x)$ și $\varphi(x)$ se obțin din $F(x)$ pentru $\lambda=1$, $\mu=0$ și pentru $\lambda=0$, $\mu=1$.

Să presupunem că rădăcinile lui $f(x)$ și $\varphi(x)$ nu se separă reciproc. Fără a restrînge din generalitate, putem considera că între două rădăcini vecine x_1 și x_2 ale polinomului $f(x)$ nu există rădăcini ale lui $\varphi(x)$. Atunci, $\psi(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ este continuă pentru $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ și se anulează la capetele acestui interval. Conform teoremei lui Rolle, în interiorul intervalului (x_1, x_2) se va găsi un punct x_0, astfel încît $\psi'(x_0)=0$. Atunci, $\psi(x)-\psi(x_0)$ admite x_0 ca rădăcină multiplă de ordin $k\geqslant 2$. Pe baza rezultatului problemei 581, dacă ρ este suficient de mic, pe circumferința $|z-x_0|=\rho$ există cel puțin patru puncte în care $\Im(\psi(z))=\Im(\psi(x_0)=0$.

Dintre aceste puncte, cel puțin unul, anume z_0, nu este real. Numărul $\mu=\psi(z_0)$ este real. Polinomul $F(x)=-f(x)+\mu\varphi(x)$ are o rădăcină imaginară, ceea ce contrazice ipoteza.

728. Rădăcinile $\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_{n-1}$ ale polinomului $f'(x)$ împart axa reală în n intervale:

$$(-\infty, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \ldots, (\xi_{n-2}, \xi_{n-1}), (\xi_{n-1}, \infty).$$

În virtutea teoremei lui Rolle, în fiecare dintre aceste intervale polinomul $f(x)$ are cel mult o rădăcină. Mai departe, pentru orice λ real polinomul $f'(x) + \lambda f''(x)$ are cel mult o rădăcină în fiecare dintre intervalele menționate. Prin urmare, tot în virtutea teoremei lui Rolle, $f(x)+\lambda f'(x)$ are cel mult două rădăcini în fiecare interval, ținînd seamă de multiplicitate.

Să împărțim acum intervalele în două clase. În prima clasă vom grupa toate intervalele în care există o rădăcină a lui $f(x)$. În clasa a doua vom grupa intervalele în care nu există nici o rădăcină a lui $f(x)$. Să considerăm funcția $\psi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. În intervalele din prima clasă, $\psi(x)$ are o rădăcină simplă și de aceea, își schimbă semnul. În intervalele din clasa a doua, $\psi(x)$ nu își schimbă semnul. În intervalele din prima clasă, $\psi(x)+\lambda$ are un număr impar de rădăcini; ținînd seama de multiplicitate. Prin urmare, din cele spuse mai sus rezultă că într-un interval din prima clasă, $\psi(x)+\lambda$ are numai o singură rădăcină simplă și nu are rădăcini multiple. De aceea, $\psi'(x)$ nu are rădăcini într-un interval de prima clasă. Să studiem acum intervalele de clasa a doua. Fie ξ_0 punctul dintr-un interval de clasa a doua, în care valoarea absolută a lui $\psi(x)$ atinge un minim, și fie $\lambda_0=\psi(\xi_0)$. Pentru a fixa ideile, vom presupune că $\psi(x)$ este pozitiv în acest interval. În acest caz, funcția $\psi(x)-\lambda$ nu are rădăcini în intervalul care ne interesează pentru $\lambda<\lambda_0$ și are cel puțin două rădăcini pentru $\lambda>\lambda_0$.

În virtutea celor spuse mai sus, pentru $\lambda>\lambda_0$ numărul rădăcinilor lui $\psi(x)-\lambda$ este exact egal cu două și ambele rădăcini sînt simple.

Mai departe, $\psi(x)-\lambda_0$ admite pe ξ_0 ca rădăcină multiplă, dublă.

Așadar, $\psi(x)-\lambda$ nu are rădăcini multiple în intervalele de clasa întîia și are numai o singură rădăcină multiplă, pentru o singură valoare a lui λ în fiecare interval de clasa a doua. Mai departe, fiecare rădăcină a lui $\eta f'^2(x)-f(x)f''(x)$ este o rădăcină multiplă pentru $\psi(x)-\psi(\eta)$, deoarece

$$[\psi(x)]' = \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Așadar, numărul rădăcinilor reale ale lui $f'^2(x)-f(x)f''(x)$ este egal cu numărul intervalelor de clasa a doua, care este evident egal cu numărul rădăcinilor imaginare ale lui $f(x)$.

729. $\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)$ are toate rădăcinile reale, pentru orice constante reale λ şi μ (problema 726). Prin urmare, în virtutea teoremei lui Rolle, $\lambda f_1'(x)+\mu f_2'(x)$ are toate rădăcinile reale. De aici rezultă (problema 727) că rădăcinile lui $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ se separă.

730. Să presupunem că $f(x)$ nu are rădăcini multiple şi fie $\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_{n-1}$ rădăcinile lui $f'(x)$. Să examinăm funcţia $\psi(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}+\frac{x+\lambda}{\gamma}$. Evident că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=\frac{1}{n}+\frac{1}{\gamma}>0$, dacă $\gamma>0$ sau dacă $\gamma<-n$. De aici rezultă că $\psi(x)\to+\infty$ pentru $x\to+\infty$ şi $\psi(x)\to-\infty$ pentru $x\to-\infty$. Afară de aceasta, $\psi(x)\to-\infty$, cînd $x\to\xi_i$ de la dreapta şi $\psi(x)\to+\infty$, cînd $x\to\xi_i$ de la stînga. Aşadar, $\psi(x)$ variază dela $-\infty$ la $+\infty$, în fiecare dintre intervalele $(-\infty, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2), $\ldots$, (ξ_{n-1}, ∞) rămînînd continuă în interiorul acestor intervale.

Prin urmare, $\psi(x)$ şi odată cu ea numărătorul ei $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ are cel puţin n rădăcini diferite pentru $\gamma>0$ sau $\gamma<-n$. Numărul rădăcinilor lui $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ nu depăşeşte însă numărul n, deoarece $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ este un polinom de gradul n. Dacă $f(x)$ are rădăcini multiple şi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt rădăcinile distincte ale lui $f(x)$, atunci $f'(x)$ are $k-1$ rădăcini $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}$ diferite de $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Printr-un raţionament analog cu cel precedent, ne convingem că există k rădăcini ale lui $\psi(x)$. Toate aceste rădăcini, în afară de $-\lambda$, dacă $-\lambda$ se găseşte printre rădăcinile lui $f(x)$, vor fi diferite de rădăcinile lui $f(x)$.

Afară de aceste rădăcini, $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ mai admite ca rădăcini pe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ cu suma ordinelor de multiplicitate $n-k$ [dacă $-\lambda$ nu este o rădăcină a lui $f(x)$] sau $n-k+1$ [dacă $-\lambda$ este o rădăcină a lui $f(x)$].

Numărul total al rădăcinilor reale ale lui $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$, ţinînd seamă şi de multiplicitate, se găseşte că este din nou egal cu n.

731. Fie $\varphi(x)=b_k(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\ldots(x+\gamma_k)$. Fiecare γ_i este, sau mai mare decît zero, sau mai mic decît $-n$.

Evident că coeficienţii polinomului

$$F_1(x)=\gamma_1 f(x)+xf'(x) \text{ sînt } a_i(\gamma_1+i).$$

Coeficienţii polinomului

$$F_2(x)=\gamma_2 F_1(x)+xF_1'(x) \text{ sînt } a_i(\gamma_1+i)(\gamma_2+i)$$

etc., coeficienții lui

$$F_k(x) = \gamma_k F_{k-1}(x) + xF'_{k-1}(x)$$

sînt

$$a_i(\gamma_1+i)\ (\gamma_2+i)\ \ldots\ (\gamma_k+i),\ i=1, 2, \ldots, n.$$

Pe baza rezultatului problemei 730, toate rădăcinile tuturor polinoamelor $F_1F_2, \ldots, F_k$ sînt reale. Avem, însă,

$$a_0\varphi(0)+a_1\varphi(1)x+ \ldots +a_n\varphi(n)x^n = b_kF_k(x).$$

732. Fie $f(x)=f_1(x)(x+\lambda)$, unde λ este un număr real, iar $f_1(x)$ este un polinom de gradul $n-1$, care are toate rădăcinile reale. Să admitem că propoziția este adevărată pentru polinoamele de gradul $n-1$ și, în această ipoteză, să o demonstrăm pentru polinoamele de gradul n.

Fie $f_1(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}$;
$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$

Atunci

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda b_0, \\ a_1 &= \lambda b_1+b_0, \\ a_2 &= \lambda b_2+b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= \lambda b_{n-1}+b_{n-2}, \\ a_n &= b_{n-1} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} &a_0+a_1\gamma x+a_2\gamma(\gamma-1)x^2+\ldots+a_n\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+1)x^n = \\ &=\lambda[b_0+b_1\gamma x+b_2\gamma(\gamma-1)x^2+\ldots+b_{n-1}\gamma(\gamma-1)\ldots \\ &\ldots(\gamma-n+2)x^{n-1}]+x\gamma(b_0+b_1(\gamma-1)x+b_2(\gamma-1)(\gamma-2)x^2+\ldots \\ &\ldots+b_{n-1}(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots(\gamma-n+1)x^{n-1})= \\ &=\lambda\varphi(x)+x[\gamma\varphi(x)-x\varphi'(x)], \end{aligned}$$

unde am notat cu $\varphi(x)$ polinomul

$$b_0+b_1\gamma x+b_2\gamma(\gamma-1)x^2+\ldots+b_{n-1}\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+2)x^{n-1}.$$

În virtutea ipotezei făcute, toate rădăcinile polinomului $\varphi(x)$ sînt reale. Ne rămîne să demonstrăm următoarea lemă:

Lemă. Dacă $\varphi(x)$ este un polinom de gradul $n-1$ care are numai rădăcini reale, toate rădăcinile polinomului $\psi(x)=\lambda\varphi+\gamma x\varphi-x^2\varphi'$ sînt reale pentru $\gamma > n-1$ și pentru orice λ real.

Demonstrare. Fără a restrînge generalitatea, putem considera că 0 nu este o rădăcină a lui $\varphi(x)$, deoarece dacă $\varphi = x^k\varphi_1$, $\varphi_1(0) \neq 0$, atunci

$$\psi(x) = x^k(\lambda\varphi_1 + (\gamma - k)\, x\varphi_1 - x^2\varphi_1') = x^k\psi_1$$

și $\gamma_1 = \gamma - k$ nu depășește gradul lui φ_1.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_m$ rădăcinile diferite ale lui φ. Printre rădăcinile polinomului ψ se găsesc rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$, cu suma ordinelor de multiplicitate $n-1-m$. Să examinăm expresia

$$w(x) = \lambda + \gamma x - \frac{x^2\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Evident că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w(x)}{x} = \gamma - (n-1) > 0.$$

Prin urmare, $w(x) \to -\infty$ pentru $x \to -\infty$ și $w(x) \to +\infty$ pentru $x \to +\infty$.

Afară de aceasta, $w(x) \to +\infty$ cînd $x \to x_i$ de la stînga și $w(x) \to -\infty$ cînd $x \to x_i$ de la dreapta.

Datorită acestui fapt, $w(x)$ are rădăcini în fiecare dintre intervalele

$$(-\infty, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_{m-1}, x_m),\ (x_m, +\infty).$$

Numărul total de rădăcini reale ale lui $\psi(x)$, ținînd seamă de multiplicitate, este egal cu $n-1-m+m+1=n$, adică este egal cu gradul lui $\psi(x)$, ceea ce era de demonstrat.

733. Dacă toate rădăcinile polinomului $a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n$ sînt reale, toate rădăcinile polinomului $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ sînt de asemenea, reale. Mai departe, toate rădăcinile polinoamelor

$$a_0\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+1)\,x^n + a_1\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots$$
$$\ldots(\gamma_1-n+2)x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\gamma_1 x + a_n$$

și

$$a_0\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+1) + a_1\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+2)x + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}\gamma_1 x^{n-1} + a_nx^n = \left[a_0 + \frac{a_1}{\gamma_1-n+1}x + \ldots + \right.$$
$$+ \frac{a_{n-1}}{(\gamma_1-n+1)(\gamma_1-n+2)\ldots(\gamma_1-1)}x^{n-1} +$$
$$\left. + \frac{a_n}{(\gamma_1-n+1)(\gamma_1-n+2)\ldots\gamma_1}x^n\right]\gamma_1(\gamma_1+1)\ldots(\gamma_1-n+1)$$

sînt reale pentru $\gamma_1 > n-1$. Punînd $\gamma_1 - n + 1 = \alpha > 0$, deducem că toate rădăcinile polinomului

$$a_0 + \frac{a_1}{\alpha} x + \frac{a_2}{\alpha(\alpha+1)} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)} x^n$$

sînt reale. Aplicînd a doua oară rezultatul problemei 732, obţinem rezultatul cerut.

734. 1. Să presupunem că toate rădăcinile lui $f(x)$ sînt pozitive. Atunci, polinomul $a_0 + a_1 w x + \ldots + a_n w^{n^2} x^n$ nu poate avea rădăcini negative.

Să admitem că teorema este valabilă pentru polinoamele de gradul $n-1$. Să punem

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 w x + b_2 w^4 x^2 + \ldots + b_{n-1} w^{(n-1)^2} x^{n-1}.$$

Fie $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sînt rădăcinile lui $\varphi(x)$ şi fie $\frac{x_i}{x_{i-1}} > w^{-2}$.

Fie, mai departe, $f(x) = (\lambda - x)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1})$. Coeficienţii polinomului $f(x)$ sînt egali cu

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda b_0, \\ a_1 &= \lambda b_1 - b_0, \\ a_2 &= \lambda b_2 - b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= \lambda b_{n-1} - b_{n-2}, \\ a_n &= -b_{n-1}. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\psi(x) = a_0 + a_1 w x + a_2 w^4 x^2 + \ldots a_n w^{n^2} x^n = \lambda(b_0 + b_1 w x + \ldots + b_{n-1} w^{(n-1)^2} x^{n-1}) - x(b_0 w + b_1 w^4 x + \ldots + b_{n-1} w^{n^2} x^{n-1}) = \lambda\varphi(x) - xw\varphi(xw^2).$$

In virtutea ipotezei inducţiei, rădăcinile polinoamelor $\varphi(x)$ şi $x\varphi(xw^2)$ se separă reciproc. Prin urmare, toate rădăcinile polinomului $\lambda\varphi(x) + xw\varphi(xw^2)$ care ne interesează, sînt reale. Ne rămîne să verificăm că ele sînt distribuite după aceeaşi lege ca şi rădăcinile polinomului $\varphi(x)$.

Să notăm cu $z_1, z_2, \ldots, z_n$ rădăcinile lui $\psi(x)$. Se vede uşor că

$$0 < z_1 < x_1 < x_1 w^{-2} < z_2 < x_2 < x_2 w^{-2} < z_3 \ldots \ldots < z_{n-1} < x_{n-1} < x_{n-1} w^{-2} < z_n.$$

De aici rezultă că $\frac{z_i}{z_{i-1}} > \frac{x_{i-1}\, w^{-2}}{x_{i-1}} = w^{-2}$, ceea ce era de demonstrat.

2. Să examinăm expresia $\varphi_m(x) = \left(1 - \frac{x^2 \lg \frac{1}{w}}{m}\right)^m$.

Pentru m suficient de mare, rădăcinile polinomului $\varphi_m(x)$, egale cu $\pm \sqrt{\frac{m}{\lg \frac{1}{w}}}$, nu sînt conținute în intervalul $(0, n)$.

Prin urmare (problema 731) toate rădăcinile polinomului $a_0\varphi_m(0) + a_1\varphi_m(1)x + \ldots + a_n\varphi_m(n)x^n$ sînt reale. Însă, $\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = w^{x^2}$. Prin urmare, în virtutea continuității rădăcinilor ca funcții de coeficienți, toate rădăcinile polinomului $a_0 + a_1 w x + \ldots + a_n w^{n^2} x^n$ sînt reale.

735. Să notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Fără a micșora generalitatea, putem considera aceste rădăcini pozitive. Fie, mai departe,

$$\varphi(x) = a_0 \cos\varphi + a_1 \cos(\varphi + \theta)\, x + \ldots + a_n \cos(\varphi + n\theta)\, x^n;$$
$$\psi(x) = a_0 \sin\varphi + a_1 \sin(\varphi + \theta)\, x + \ldots + a_n \sin(\varphi + n\theta)\, x^n.$$

Atunci

$$\varphi(x) + i\psi(x) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\, a_n \prod_{i=1}^{n} (\alpha x - x_i),$$

$$\varphi(x) - i\psi(x) = (\cos\varphi - i\sin\varphi)\, a_n \prod_{i=1}^{n} (\alpha' x - x_i),$$

în care

$$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta; \quad \alpha' = \cos\theta - i\sin\theta.$$

Prin urmare

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x) + i\psi(x)}{\varphi(x) - i\psi(x)} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha x - x_i}{\alpha' x - x_i}.$$

Fie $x = \rho\beta$ o rădăcină a polinomului $\varphi(x)$.

Aici $\rho = |x|$; $\beta = \cos\lambda + i\sin\lambda$.

Atunci, $|\Phi(x)| = 1$ și, prin urmare,

$$\prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\rho\alpha\beta - x_i}{\rho\alpha'\beta - x_i} \right| = 1,$$

însă

$$\left| \frac{\rho\alpha\beta - x_i}{\rho\alpha'\beta - x_i} \right|^2 = \frac{(\rho\alpha\beta - x_i)(\rho\alpha'\beta' - x_i)}{(\rho\alpha'\beta - x_i)(\rho\alpha\beta' - x_i)} =$$

$$= 1 + \frac{\rho x_i (\alpha - \alpha')(\beta' - \beta)}{|\rho\alpha'\beta - x_i|^2} = 1 + \frac{4\rho x_i \sin\theta \sin\lambda}{|\rho\alpha'\beta - x_i|^2}.$$

Să lăsăm la o parte cazul, puțin interesant, cînd $\sin\theta = 0$. Dacă $\sin\lambda \neq 0$, atunci toți $\left| \frac{\rho\alpha\beta - x_i}{\rho\alpha'\beta - x_i} \right|^2$ sînt simultan mai mari sau mai mici decît unitatea și produsul lor nu poate fi egal cu 1.

Prin urmare, $\sin\lambda = 0$, adică x este real.

736. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — rădăcinile polinomului

$$f(x) = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)x + \ldots + (a_n + ib_n)x^n = \varphi(x) + i\psi(x).$$

Părțile imaginare ale acestor rădăcini sînt pozitive. Să considerăm polinomul $\overline{f}(x) = \varphi(x) - i\psi(x)$. El va avea ca rădăcini pe $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, conjugatele rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Atunci

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x) + i\psi(x)}{\varphi(x) - i\psi(x)} = \left| \frac{a_n + ib_n}{a_n - ib_n} \right| \prod_{i=1}^{n} \frac{x - x_i}{x - x_i'}.$$

Dacă x_0 este o rădăcină a lui $\varphi(x)$, atunci

$$|\Phi(x_0)| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{x_0 - x_i}{x_0 - x_i'} \right| = 1.$$

Insă

$$\left| \frac{x_0 - x_i}{x_0 - x_i'} \right|^2 = \frac{(x_0 - x_i)(x_i' - x_i')}{(x_0 - x_i')(x_0' - x_i)} = 1 + \frac{(x_i - x_i')(x_0 - x_0')}{|x_0 - x_i|^2} =$$

$$= 1 - \frac{4\,\delta(x_0)\,\delta(x_i)}{|x_0 - x_j'|^2}.$$

Prin urmare, dacă $\mathfrak{F}(x_0) > 0$, atunci $\left|\frac{x_0 - x_i}{x_0 - x_i'}\right| < 1$ pentru orice i, iar dacă $\mathfrak{F}(x_0) < 0$, atunci $\left|\frac{x_0 - x_i}{x_0 - x_i'}\right| > 1$ pentru orice i.

(Același rezultat se poate obține foarte ușor și pe cale geometrică, fără nici un calcul.)

Prin urmare, egalitatea $|\Phi(x_0)| = 1$ este posibilă numai pentru un x_0 real și de aceea toate rădăcinile lui $\varphi(x)$ sînt reale.

Mai departe, să examinăm polinomul

$$(\alpha - \beta i)[\varphi(x) + i\psi(x)] = \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) + i\,[\alpha\psi(x) - \beta\varphi(x)].$$

Rădăcinile sale nu diferă de rădăcinile polinomului inițial, și, prin urmare, partea sa reală $\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)$ are numai rădăcini reale, pentru orice α și β reali. Dar, în acest caz, rădăcinile lui $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ se separă (problema 727).

737. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile lui $\varphi(x)$, iar $y_1, y_2, \ldots y_n$ rădăcinile lui $\psi(x)$. Fără a restrînge din generalitate, putem presupune că coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt ai lui φ și ψ sînt pozitivi și că

$$x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \ldots > y_{n-1} > x_n > y_n$$

(y_n poate lipsi).

Să descompunem pe $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ în fracții simple

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = A + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}\,; \quad A_k = \frac{\psi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

Se vede ușor că toți coeficienții $A_k > 0$. Să punem $x = a + b\tilde{\imath}$ și să scriem partea imaginară a expresiei

$$\frac{-i(\varphi(x) + i\psi(x))}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i\,;$$

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i\right) = -1 + \mathfrak{F}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a + bi - x_k}\right) =$$

$$= -1 + b\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(a - x_k)^2 + b^2}\,.$$

Dacă $b \geqslant 0$, atunci $\varepsilon\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i\right) < 0$ și, prin urmare, $\varphi(x) + i\psi(x) \neq 0$. Așadar, în cazul considerat, toate rădăcinile lui $\varphi(x) + i\psi(x)$ sînt situate în semiplanul inferior. În mod analog, se examinează și alte cazuri de așezare a rădăcinilor.

738. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}$; x_k sînt rădăcinile lui $f(x)$. Fie $x = a - bi$, $b > 0$. Atunci,

$$\vartheta\left(\frac{f'(a-bi)}{f(a-bi)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b + \vartheta(x_k)}{(x - x_k)^2} > 0.$$

Prin urmare,

$$f'(x - bi) \neq 0.$$

739. Să presupunem că semiplanul este definit prin inegalitatea

$$r\cos(\theta - \varphi) > p, \text{ unde } x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Să punem $x = (x' + pi)(\sin\theta + i\cos\theta)$. Atunci,

$$x' = -pi + x(\sin\theta + i\cos\theta) = r\sin(\theta - \varphi) + i[r\cos(\theta - \varphi) - p].$$

De aici rezultă că dacă x este situat în acest semiplan, atunci x' este situat în semiplanul $\vartheta(x') > 0$, și reciproc.

Rădăcinile polinomului $f[(x' + pi)(\sin\theta - i\cos\theta)]$ sînt situate, așadar, în semiplanul superior.

Pe baza problemei 738, rădăcinile derivatei sale, egale cu $[\sin\theta - i\cos\theta]\, f'[(x' + pi)(\sin\theta - i\cos\theta)]$, sînt de asemenea, situate în semiplanul superior.

Prin urmare, rădăcinile polinomului $f'(x)$ sînt situate în semiplanul dat.

740. Rezultă direct din rezultatul problemei 739.

741. Ecuația se descompune în două:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{ki} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{ki} = 0.$$

Descompunerea în fracții simple dă

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} \pm \frac{1}{ki} = 0;$$

x_k sînt rădăcinile lui $f(x)$, reale prin ipoteză. Fie $x = a + bi$; atunci

$$\left| \Im\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} \right) \right| = |b| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a - x_k)^2 + b^2} < \frac{n}{|b|}.$$

Pentru rădăcinile fiecăreia dintre ecuații trebuie să avem

$$\frac{1}{k} < \frac{n}{|b|}, \text{ de unde } |b| < kn.$$

742. Toate rădăcinile lui $f'(x)$ sînt, evident, reale. Să le notăm cu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$. Mai departe, să notăm cu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rădăcinile polinomului $f(x) - b$ și cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului $f(x) - a$. Atunci

$$y_1 < \xi_1 < y_2 < \xi_2 \ldots < y_{n-1} < \xi_{n-1} < y_n,$$
$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \ldots < x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_n.$$

Din aceste inegalități rezultă că intervalele determinate de punctele x_i, y_i sînt disjuncte, deoarece ele sînt conținute în intervalele disjuncte, două cîte două.

$$(-\infty, \xi_1); \quad (\xi_1, \xi_2); \ldots; (\xi_{n-1}, +\infty).$$

Polinomul $f(x)$ ia la capetele fiecăruia dintre intervalele considerate valorile a și b și, deci, ia în interiorul intervalului toate valorile intermediare. Prin urmare, $f(x) - \lambda$ se anulează de n ori pe axa reală, ceea ce era de demonstrat.

743. Dacă părțile reale ale rădăcinilor polinomului $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ au același semn, atunci părțile imaginare ale rădăcinilor polinomului

$$i^n f(-ix) = x^n + ia_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - ia_3 x^{n-3} + \ldots$$

au, de asemenea, același semn, și reciproc.

In virtutea rezultatelor problemelor 736, 737, pentru aceasta este necesar și suficient ca rădăcinile polinoamelor $x^n - a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} - \ldots$ și $a_1 x^{n-1} - a_3 x^{n-3} + a_5 x^{n-5} - \ldots$ să fie reale și să se separe.

744. Se cere ca $a > 0$ și ca rădăcinile polinoamelor $x^3 - bx$ și $ax^2 - c$ să fie reale și să se separe. Pentru aceasta, este necesară și suficientă condiția $0 < \frac{c}{a} < b$ sau $c > 0$, $ab - c > 0$.

Așadar, pentru ca părțile reale ale tuturor rădăcinilor ecuației

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

să fie negative, este necesar și suficient să fie îndeplinite inegalitățile $a > 0$, $c > 0$; $ab - c > 0$.

745. $a > 0$; $c > 0$; $d > 0$; $abc - c^2 - a^2d > 0$.

746. Să punem $x = \frac{1+y}{1-y}$. Se vede ușor că dacă $|x| < 1$, atunci partea reală a lui y este negativă, și reciproc.

Prin urmare, pentru ca toate rădăcinile x_1, x_2, x_3, ale ecuației $f(x)=0$ să fie mai mici în modul decît 1, este necesar și suficient ca toate rădăcinile ecuației $f\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 0$ să aibă părțile reale negative. Ultima ecuație are forma

$$y^3(1 - a + b - c) + y^2(3 - a - b + 3c) + y(3 + a - b - 3c) + \\ + (1 + a + b + c) = 0.$$

Afară de aceasta, se vede ușor că este necesară condiția

$$1 - a + b - c = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) > 0.$$

Pe baza rezultatului problemei 744, obținem condițiile necesare și suficiente

$$1 - a + b - c > 0;\ 1 + a + b + c > 0;\ 3 - a - b + 3c > 0;$$
$$1 - b + ac - c^2 > 0.$$

747. $f(x)(1-x) = a_n + (a_{n-1} - a_n)x + (a_{n-2} - a_{n-1})x^2 + \ldots + \\ + (a_0 - a_1)x^n - a_0x^{n+1}$.

Fie $|x| = \rho > 1$. Atunci

$$|f(x)(1-x)| \geqslant a_0\rho^{n+1} - |a_n + (a_{n-1} - a_n)a + \ldots + \\ + (a_0 - a_1)x^n| \geqslant a_0\rho^{n+1} - \rho^n(a_n + a_{n-1} - a_n + \ldots + \\ + a_0 - a_1) = a_0(\rho^{n+1} - \rho^n) > 0.$$

Prin urmare, $f(x) \neq 0$ pentru $|x| > 1$.

748. $-0{,}6618$, **749.** $2{,}094551$. **750.** a) $3{,}3876$; $-0{,}5136$; $-2{,}8741$; b) $2{,}8931$; c) $3{,}9489$; $0{,}2172$; $-1{,}1660$; d) $3{,}1149$; $0{,}7459$; $-0{,}8608$.

751. Problema se reduce la calculul rădăcinii ecuației $x^3 - 3x + 1 = 0$, cuprinsă în intervalul $(0, 1)$.
Răspuns: $x = 0{,}347$ (cu eroarea de 0,001).
752. 2,4908.
753. a) 1,7320; b) — 0,7321; c) 0,6180; d) 0,2679; e) —3,1623; f) 1,2361; g) — 2,3028; h) 3,6457; i) 1,6180.
754. a) 1,0953; — 0,2624; — 1,4773; — 2,3556;
b) 0,8270; 0,3383; —1,2090; — 2,9563;
c) 1,4689; 0,1168;
d) 8,0060; 1,2855; 0,1960; — 1,4875;
e) 1,5357; — 0,1537;
f) 3,3322; 1,0947; — 0,6002; — 1,8268;
g) 0,4910; — 1,4910;
h) 2,1462; — 0,6821; — 1,3178; — 4,1463.

CAPITOLUL VI

FUNCȚII SIMETRICE

755. Dăm soluția amănunțită a exercițiului *f*):

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2).$$

Termenul de rangul cel mai înalt al polinomului F este egal cu $x_1^4 \cdot x_2^2$.

Să scriem exponenții din termenii de rangul cel mai înalt ai polinoamelor care vor rămîne după eliminarea succesivă a termenilor superiori prin scăderea unor combinații convenabile ale polinoamelor simetrice fundamentale. Acești exponenți vor fi:

$$(4,2,0);\ (4,1,1);\ (3,3,0);\ (3,2,1) \text{ și } (2,2,2).$$

Prin urmare, $F = f_1^2 f_2^2 + Af_1^3 f_3 + Bf_2^3 + Cf_1 f_2 f_3 + Df_3^2$ unde A, B, C, D sînt coeficienți numerici. Determinăm acești coeficienți dînd lui x_1, x_2, x_3 valori particulare

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	F
1	1	0	2	1	0	2
2	— 1	— 1	0	— 3	2	50
1	— 2	— 2	— 3	0	4	200
1	— 1	— 1	— 1	— 1	1	8

Pentru determinarea lui A,B,C,D obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} 2 &= 4+B; \\ 50 &= -27B+4D; \\ 200 &= -108A+16D; \\ 8 &= 1-A-B+C+D, \end{aligned}$$

de unde $B=-2$; $D=-1$; $A=-2$; $C=4$. Aşadar, $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2) = f_1^2f_2^2 - 2f_1^3f_3 - 2f_2^3 + 4f_1f_2f_3 - f_3^2$.

Iată şi răspunsurile la celelalte exerciţii:

a) $f_1^3 - 3f_1f_2$; b) $f_1f_2 - 3f_3$; c) $f_1^4 - 4f_1^2f_2 + 8f_1f_3$;

d) $f_1^3f_2^2 - 2f_1^4f_3 - 3f_1f_2^3 + 6f_1^2f_2f_3 + 3f_2^2f_3 - 7f_1f_3^2$;

e) $f_1f_2 - f_3$; g) $2f_1^3 - 9f_1f_2 + 27f_3$;

h) $f_1^2f_2^2 - 4f_1^3f_3 - 4f_2^3 + 18f_1f_2f_3 - 27f_3^2$;

756. a) $f_1f_2f_3 - f_1^2f_4 - f_3^2$; b) $f_1^2f_4 + f_3^2 - 4f_2f_4$;

c) $f_1^3 - 4f_1f_2 + 8f_3$.

757. a) $f_1^2 - 2f_2$; b) $f_1^3 - 3f_1f_2 + 3f_3$;

c) $f_1f_3 - 4f_4$; d) $f_2^2 - 2f_1f_3 + 2f_4$;

e) $f_1^2f_2 - f_1f_3 - 2f_2^2 + 4f_4$; f) $f_1^4 - 4f_1^2f_2 + 2f_2^2 + 4f_1f_3 - 4f_4$;

g) $f_2f_3 - 3f_1f_4 + 5f_5$; h) $f_1^2f_3 - 2f_2f_3 - f_1f_4 + 5f_5$;

i) $f_1f_2^2 - 2f_1^2f_3 - f_2f_3 + 5f_1f_4 - 5f_5$;

j) $f_1^3f_2 - 3f_1f_2^2 - f_1^2f_3 + 5f_2f_3 + f_1f_4 - 5f_5$;

k $f_1^5 - 5f_1^3f_2 + 5f_1f_2^2 + 5f_1^2f_3 - 5f_2f_3 - 5f_1f_4 + 5f_6$;

l) $f_2f_4 - 4f_1f_5 + 9f_6$; m) $f_3^2 - 2f_2f_4 + 2f_1f_5 - 2f_6$;

n) $f_1^2f_4 - 2f_2f_4 - f_1f_5 + 6f_6$;

o) $f_1f_2f_3 - 3f_1^2f_4 - 3f_3^2 + 4f_2f_4 + 7f_1f_5 - 12f_6$;

p) $f_2^3 - 3f_1f_2f_3 + 3f_1^2f_4 + 3f_3^2 - 3f_2f_4 - 3f_1f_5 + 3f_6$;

r) $f_1^3f_3 - 3f_1f_2f_3 - f_1^2f_4 + 3f_3^2 + 2f_2f_4 + f_1f_5 - 6f_6$;

s) $f_1^2f_2^2 - 2f_1^3f_3 - 2f_2^3 + 4f_1f_2f_3 + 2f_1^2f_4 - 3f_3^2 + 2f_2f_4 - 6f_1f_5 + 6f_6$;

t) $f_1^4f_2 - 4f_1^2f_2^2 - f_1^3f_3 + 2f_2^3 + 7f_1f_2f_3 + f_1^2f_4 - 3f_3^2 - 6f_2f_4 - f_1f_5 + 6f_6$;

u) $f_1^6 - 6f_1^4f_2 + 9f_1^2f_2^2 + 6f_1^3f_3 - 2f_2^3 - 12f_1f_2f_3 - 6f_1^2f_4 + 3f_3^2 + 6f_2f_4 + 6f_1f_5 - 6f_6$.

758. a) $nf_1^2 - 8f_2$;

b) $-f_1^n + 4f_1^{n-2}f_2 - 8f_1^{n-3}f_3 + \ldots + (-2)^n f_n$.

759. a) $(n-1)f_1^2 - 2nf_2$; b) $(n-1)f_1^3 - 3(n-2)f_1f_2 + 3(n-4)f_3$;

c) $(n-1)f_1^4 - 4nf_1^2f_2 + 2(n+6)f_2^2 + 4(n-3)f_1f_3 - 4nf_4$;

d) $\frac{3(n-1)(n-2)}{2} f_1^2 - (3n-1)(n-2)f_2$.

760. $f_k^2 - 2f_{k-1}f_{k+1} + 2f_{k-2}f_{k+2} - 2f_{k-3}f_{k+3} + \ldots$

761. $(n-1)! \sum_{i=1}^{n} a_i^2 f_1^2 - 2(n-2)! \left[n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_2\right] f_2 =$

$= (n-1)! S_2 s_2 + 4(n-2)! F_2 f_2$, unde

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 ; \quad s_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 ; \quad F_2 = \sum_{i<k} a_i a_k ; \quad f_2 = \sum_{i<k} x_i x_k .$$

762. a) $\frac{f_1f_2 - 3f_3}{f_3}$; b) $\frac{2(f_1^2f_2 - 3f_1f_3 - 2f_2^2)}{f_1f_2 - f_3}$; c) $\frac{f_2^3 + f_1^3f_3 - 6f_1f_2f_3 + 9f_3^2}{f_3^2}$.

763. a) $\frac{f_2^2 - 2f_1f_3 + 2f_4}{f_4}$; b) $\frac{f_1^2f_2^2 + f_1^3f_3 - 6f_1f_2f_3 + 6f_3^2 + 2f_1^2f_4}{f_1f_2f_3 - f_1^2f_4 - f_3^2}$.

764. a) $\frac{f_{n-1}}{f_n}$; b) $\frac{f_{n-1}^2 - 2f_{n-2}f_n}{f_n^2}$; c) $\frac{f_1f_{n-1} - nf_n}{f_n}$;

d) $\frac{f_1^2f_{n-1}^2 - 2f_2f_{n-1}^2 - 2f_1^2f_{n-2}f_n + 4f_2f_{n-2}f_n - nf_n^2}{f_n^2}$;

e) $\frac{f_1^2f_{n-1} - 2f_2f_{n-1} - f_1f_n}{f_n}$; f) $\frac{f_2f_{n-1} - (n-1)f_1f_n}{f_n}$.

765. -4. **766.** -35. **767.** 16.

768. a) -3; b) $-2p^3 - 3q^2$ c) $-p^3$; $(x_1^2 - x_2x_3 = -p)$;

d) q^4; e) $\frac{-2p-3q}{1+p-q}$; f) $\frac{2p^2 - 4p - 4pq + 3q^2 + 6q}{(1+p-q)^2}$.

769. Fie $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$. Atunci, $2x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b$. Prin urmare, $\sqrt{\frac{a^2-2b}{2}}$ sau $-\sqrt{\frac{a^2-2b}{2}}$ se află printre rădăcinile

ecuației date. Pentru aceasta, este necesar și suficient să fie îndeplinită condiția:

$$a^4(a^2-2b) = 2(a^3-2ab+2c)^2.$$

770.
$$a = -x_1-x_2-x_3,$$
$$ab-c = -(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3),$$
$$c = -x_1x_2x_3.$$

Dacă toate rădăcinile sînt reale și negative, atunci

$$a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Dacă o rădăcină x_1 este reală, iar x_2 și x_3 sînt complex conjugate cu partea reală negativă, atunci $x_2+x_3 < 0$, $x_2x_3 > 0$, $(x_1+x_2)(x_1+x_3) > 0$ și, prin urmare, $a > 0$, $b > 0$ și $c > 0$. Am demonstrat astfel că aceste condiții sînt necesare.

Să admitem acum că $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Dacă x_1 este real, iar x_2 și x_3 sînt complex conjugate, atunci $x_2x_3 > 0$, $(x_1+x_2)(x_1+x_3) > 0$ și din $c > 0$, $b > 0$ rezultă $x_1 < 0$, $\mathcal{R}(x_2) = x_2+x_3 < 0$.

Dacă x_1, x_2, x_3 sînt reale, atunci din $c > 0$ rezultă că o rădăcină x_1 este negativă, iar celelalte două au același semn. Dacă $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, atunci

$$-x_1-x_2 > x_3 > 0, \quad -x_1-x_3 > x_2 > 0$$

și deci, $-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) < 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, $x_2 < 0$, $x_3 < 0$.

O altă soluție se dă în problema 474.

771. $s = \frac{1}{4}\sqrt{a(4ab-a^3-8c)}$, $R = \frac{c}{\sqrt{a(4ab-a^3-bc)}}$.

772. $a(4ab-a^3-8c) = 4c^2$.

773. a) $\frac{25}{27}$; b) $-\frac{35}{27}$; c) $-\frac{1679}{625}$.

774. a) $a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3a_0 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2$;

b) $a_1^3a_3 - a_2^3a_0$; c) $\frac{a_1a_2}{a_0a_3} - 9$; d) $a_1^2a_2^2 - a_1^3a_3 - a_2^3a_0$.

775. Este suficient să demonstrăm acest lucru pentru funcțiile simetrice fundamentale. Să presupunem că φ_k este funcția simetrică fundamentală de gradul k în $x_2, x_3, \ldots, x_n$, f_k este

funcția simetrică fundamentală de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Evident că $\varphi_k = f_k - x_1\varphi_{k-1}$, de unde rezultă:

$$\varphi_k = f_k - x_1 f_{k-1} + x_1^2 f_{k-2} - \ldots + (-x_1)^{k-1} f_1 + (-1)^k x_1^k.$$

$$(-1)^k \varphi_k = a_k + a_{k-1}x_1 + \ldots + a_1 x_1^{k-1} + x_1^k.$$

776. $x_1 + x_2 = f_1 - x_3$;

$$(f_1 - x_1)(f_1 - x_2)(f_1 - x_3) = f_1^3 - f_1^3 + f_1 f_2 - f_3 = f_1 f_2 - f_3;$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 3x_1 - f_1;$$

$$(3x_1 - f_1)(3x_2 - f_1)(3x_3 - f_1) = 27 f_3 - 9 f_1 f_2 + 2 f_1^3;$$

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = f_1^2 - f_2 - f_1 x_3;$$

$$x_1^2 - x_2 x_3 = f_1 x_1 - f_2.$$

777. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = (n - k) f_{k-1}$.

778. Fie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} = n \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} + (n-1) f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} + \ldots + f_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial f_n}.$$

779. Fie $\varphi(a) = F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a)$. Atunci

$$\varphi'(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a)}{\partial x_i}.$$

Intrucît $\varphi(a)$ nu depinde de a, rezultă că $\varphi'(a) \equiv 0$ și deci $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$. Reciproc, dacă $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \equiv 0$, atunci, $\varphi'(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1 + a, \ldots, x_n + a)}{\partial x_i} = 0$, de unde rezultă că $\varphi(a)$ nu depinde de a și $\varphi(a) = \varphi(0)$, adică

$$F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

În virtutea problemei precedente, condiția $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ este echivalentă cu condiția

$$n\frac{\partial \Phi}{\partial f_1} + (n-1)f_1\frac{\partial \Phi}{\partial f_2} + \ldots + f_{n-1}\frac{\partial \Phi}{\partial f_n} = 0.$$

780. Fie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polinom simetric omogen, de gradul al doilea. Expresia lui prin funcțiile simetrice fundamentale va avea, așadar, forma $\Phi = Af_1^2 + Bf_2$. În virtutea rezultatului problemei 779, trebuie să avem $n2Af_1 + (n-1)Bf_1 = 0$, de unde $A = (n-1)\alpha$, $B = -2n\alpha$ și

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha[(n-1)f_1^2 - 2nf_2] = \alpha\sum_{i<k}(x_i - x_k)^2.$$

781. Expresia unui polinom simetric de gradul al treilea, cu ajutorul funcțiilor simetrice, fundamentale, este de forma $Af_1^3 + Bf_1f_2 + Cf_3$. În virtutea rezultatului problemei 779, trebuie să avem $3Anf_2^1 + nBf_2 + (n-1)Bf_1^2 + (n-2)Cf_2 = 0$, de unde

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha[(n-1)(n-2)f_1^3 - 3n(n-2)f_1f_2 + 3n^2f_3].$$

782. $(n-2)f_1^2f_2^2 - 2(n-1)f_1^3f_3 - 4(n-2)f_2^3 + (10n-12)f_1f_2f_3 - 4(n-1)f_1^2f_4 - 9nf_3^2 + 8nf_2f_4$.

783. Se poate lua

$$\varphi_k = f_k\left(x_1 - \frac{f_1}{n}, \quad x_2 - \frac{f_1}{n}, \ldots, x_n - \frac{f_1}{n}\right).$$

Fiecare funcție φ_k are proprietatea cerută. Mai departe, dacă $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a)$ și $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ atunci

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(0, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n).$$

784. a) $-4\varphi_2^3 - 27\varphi_3^2$; b) $18\varphi_2^2$.

785. a) $8\varphi_3$;

b) $-4\varphi_2^3\varphi_3^2 + 16\varphi_2^4\varphi_4 - 27\varphi_3^4 + 144\varphi_2\varphi_3^2\varphi_4 - 128\varphi_2^2\varphi_4^2 + 256\varphi_4^3$.

786. $s_2 = f_1^2 - 2f_2$;
$s_3 = f_1^3 - 3f_1f_2 + 3f_3$;
$s_4 = f_1^4 - 4f_1^2f_2 + 2f_2^2 + 4f_1f_3 - 4f_4$;
$s_5 = f_1^5 - 5f_1^3f_2 + 5f_1f_2^2 + 5f_1^2f_3 - 5f_2f_3 - 5f_1f_4 + 5f_5$;
$s_6 = f_1^6 - 6f_1^4f_2 + 9f_1^2f_2^2 + 6f_1^3f_3 - 2f_2^3 - 12f_1f_2f_3 - 6f_1^2f_4 + 3f_3^2 + 6f_2f_4 + 6f_1f_5 - 6f_6$.

787. $2f_2 = s_1^2 - s_2$;
$6f_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3$;
$24f_4 = s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_4$;
$120f_5 = s_1^5 - 10s_1^3s_2 + 20s_1^2s_3 + 15s_1s_2^2 - 20s_2s_3 - 30s_1s_4 + 24s_5$;
$720f_6 = s_1^6 - 15s_1^4s_2 + 40s_1^3s_3 + 45s_1^2s_2^2 - 120s_1s_2s_3 - 15s_2^3 - 90s_1^2s_4 + 40s_3^2 + 90s_2s_4 + 144s_1s_5 - 120s_6$.

788. $s_5 = 859$. **789.** $s_8 = 13$. **790.** $s_{10} = 621$.

791. $s_1 = -1$; $s_2 = s_3 = \ldots = s_n = 0$.

792. Se demonstrează ușor prin inducție completă, cu ajutorul relației,

$$as_k + bs_{k-1} + cs_{k-2} = 0,$$

unde $s_k = x_1^k + x_2^k$.

793. $s_5 - s_1^5 = 5(f_1^2 - f_2)(f_3 - f_1f_2)$; $s_3 - s_1^3 = 3(f_3 - f_1f_2)$.

794. $s_5 = -5f_2f_3$; $s_3 = 3f_3$; $s_2 = -2f_2$.

795. $s_7 = -7f_2f_5$; $s_2 = -2f_2$; $s_5 = 5f_5$.

796. $x^n - a = 0$.

797. $x^n - \frac{a}{1}x^{n-1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \frac{a^n}{n!} = 0$.

798. $x^n + \frac{P_1(\alpha)}{1}x^{n-1} + \frac{P_2(\alpha)}{2!}x^{n-2} + \ldots + \frac{P_n(\alpha)}{n!} = 0$, unde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sînt polinoamele lui Hermite.

$P_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^k}$, iar α este o rădăcină a polinomului lui Hermite $P_{n+1}(x)$.

Soluție. Să presupunem că ecuația inițială are forma

$$x^n + \alpha x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_n = 0.$$

În virtutea formulelor lui Newton:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha; \\ 2a_2 &= \alpha a_1 - 1; \\ 3a_3 &= \alpha a_2 - a_1; \\ &\dots\dots\dots \\ ka_k &= \alpha a_{k-1} - a_{k-2}; \\ &\dots\dots\dots \\ na_n &= \alpha a_{n-1} - a_{n-2}; \\ 0 &= \alpha a_n - a_{n-1}. \end{aligned}$$

Din aceste relații rezultă că a_k este un polinom de gradul k în α. Să notăm $k!a_k = P_k(\alpha)$.

Atunci, considerînd $P_0=1$, obținem

$$P_1 = \alpha \text{ și } P_k - \alpha P_{k-1} + (k-1)P_{k-2} = 0; \quad -\alpha P_n + nP_{n-1} = 0.$$

Primele relații arată că P_k este un polinom Hermite în α (v. problema 707). Ultima ne dă $P_{n+1}(\alpha)=0$.

799. $\frac{1}{2}(s_k^2 - s_{2k})$.

800. $$\sum_{i=1}^{n}(x+x_i)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m s_{k-m}\, x^m;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j+x_i)^k = \sum_{m=0}^{n} C_k^m s_{k-m}\, s_m;$$

$$\sum_{i<j}(x_i+x_j)^k = \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{k} C_k^m s_{k-m}\, s_m - 2^k n s_k\right).$$

801. $$\sum_{i<j}(x_i-x_j)^{2k} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2k} C_{2k}^m (-1)^m s_m s_{2k-m}.$$

802. Se înmulțește coloana a doua cu $-s_1$, a treia cu s_2, ..., coloana k cu $(-1)^{k-1}s_{k-1}$ și se adună la prima coloană. Pe baza formulelor lui Newton se obține:

$$\begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2f_2 & f_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)f_{k-1} & f_{k-2} & f_{k-3} & \dots & 1 \\ kf_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \dots & f_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & f_{k-2} & f_{k-3} & \dots & 1 \\ (-1)^{k-1}s_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \dots & f_1 \end{vmatrix} = s_k.$$

803. Coloana a doua se înmulțește cu $-f_1$, a treia cu f_2, ..., coloana k cu $(-1)^{k-1}f_{k-1}$ și rezultatele se adună la prima

coloană. Pe baza formulelor lui Newton se obține rezultatul cerut.

804. $n!(x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n f_n)$.

805. $\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$, unde d este cel mai mare divizor comun al numerelor m și n.

806. În virtutea rezultatelor problemelor 117, 119 este suficient să considerăm cazul $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sînt numere prime impare, distincte. În acest caz, $s_1 = s_2 = s_4 = (-1)^k$; $s_3 = 2(-1)^{k-1}$ dacă n este divizibil cu 3 și $s_3 = (-1)^k$ dacă n nu este divizibil cu 3.

Calculul după formulele lui Newton ne dă:

$$f_2 = \frac{1 - (-1)^k}{2};$$

$$f_3 = \frac{(-1)^{k-1} - 1}{2}, \text{ dacă } n \text{ este divizibil cu } 3;$$

$$f_3 = \frac{(-1)^k - 1}{2}, \text{ dacă } n \text{ nu este divizibil cu } 3;$$

$$f_4 = \frac{(-1)^{k-1} - 1}{2}, \text{ dacă } n \text{ este divizibil cu } 3;$$

$$f_4 = \frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}, \text{ dacă } n \text{ nu este divizibil cu } 3.$$

807. $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s_n = a$. Prin urmare, pentru $k \leqslant n$

$$kf_k = af_{k-1} - af_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} f_1;$$
$$(k-1)f_{k-1} = af_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-2} f_1,$$

de unde

$$kf_k = (a - k + 1)f_{k-1}; \quad f_k = \frac{a-k+1}{k} f_{k-1}.$$

Evident, $f_1 = a$; prin urmare,

$$f_2 = \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}, \ldots, f_k = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k},$$

și, de aceea, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcini ale ecuației

$$x^n - \frac{a}{1}x^{n-1} + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} = 0;$$

$$s_{n+1} = a - \frac{a(1-a)(2-a)\ldots(n-a)}{n!}.$$

808. $(x-a)(x-b)[x^n + (a+b)x^{n-1} + \ldots + (a^n + a^{n-1}b + \ldots + \ldots + b^n)] = (x-a)[x^{n+1} + ax^n + a^2x^{n-1} + \ldots + a^nx - b(a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n)] = x^{n+2} - (a^{n+1} + a^n b + \ldots + b^{n+1})x + ab(a^n + a^{n+1} + \ldots + b^n)$.

Sumele de puteri $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ pentru noul polinom sînt, evident, egale cu 0. Însă, $\sigma_k = s_k + a^k + b^k$. Prin urmare, $s_k = -(a^k + b^k)$, pentru $1 \leqslant k \leqslant n$.

809. $s_k = -a^k - b^k$, pentru k impar.

$s_k = -\left(a^{\frac{k}{2}} - b^{\frac{k}{2}}\right)^2$, pentru k par.

810. a) $(x+a)(x^2+ax+b) - c = 0$;

b) $x(x-a^2+3b)^2 - (a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 + 18abc - 27c^2) = 0$;

c) $x^3 + (3b-a^2)x^2 + b(3b-a^2)x + b^3 - a^3c = 0$;

d) $x^2(x-a^2+3b) + (a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 + 18abc - 27c^2) = 0$;

e) $x^3 - (a^2-2b)x^2 + (b^2-2ac)x - c^2 = 0$;

f) $x^3 + (a^3-3ab+3c)x^2 + (b^3-3abc+3c^2)x + c^3 = 0$.

811. $y^2 + (2a^3 - 9ab + 27c)y + (a^2-3b)^3 = 0$.

812. $y^2 - \frac{ab-3c}{c}y + \frac{b^3 + a^3c - 6abc + 9c^2}{c^2} = 0$.

813. $y^6 - \frac{ab-3c}{c}y^5 + \frac{b^3 - 5abc + 6c^2}{c^2}y^4 - \frac{a^2b^2 - 2b^3 - 2a^3b + 6abc - 7c^2}{c^2}y^3 + \frac{b^3 - 5abc + 6c^2}{c^2}y^2 - \frac{ab-3c}{c}y + 1 = 0$.

814. a) $y^3 - by^2 + (ac-4d)y - (a^2d + c^2 - 4bd) = 0$

(rezolventa lui Ferrari)

b) $y^3 - (3a^2-8b)y^2 + (3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac - 64d)y - (a^3 - 4ab + 8c)^2 = 0$

(rezolventa lui Euler)

c) $y^6 - by^5 + (ac-d)y^4 - (a^2d + c^2 - 2bd)y^3 + d(ac-d)y^2 - bd^2y + d^3 = 0$;

d) $y^6 + 3ay^5 + (3a^2+2b)y^4 + (a^3+4ab)y^3 + (2a^2b + b^2 + ac - 4d) \times y^2 + (ab^2 + a^2c - 4ad)y + (abc - a^2d - c^2) = 0$.

815. $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4b+4y_1} \pm \sqrt{a^2-4b+4y_2} \pm \sqrt{a^2-4b+4y_3}}{4}$.

Semnele rădăcinilor pătrate trebuie să fie alese astfel, încît produsul lor să fie egal cu $-a^3+4ab-8c$.

816.

$$x = \pm \frac{\sqrt{4a+\sqrt[3]{b^2-64a^3}} \pm \sqrt{4a+\varepsilon\sqrt[3]{b^2-64a^3}} \pm \sqrt{4a+\varepsilon^2\sqrt[3]{b^2-64a^3}}}{2},$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} \div \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Semnele rădăcinilor pătrate se aleg astfel, încît produsul lor să fie egal cu $-b$.

817. $(y+a)^4(y^2+6ay+25a^2)+3125b^4y=0$.

Soluție. Rădăcinile ecuației cerute sînt

$$y_1 = (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)\times (x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4+x_4x_1);$$

$$y_2 = (x_1x_3+x_3x_2+x_2x_5+x_5x_4+x_4x_1)\times (x_1x_2)+x_2x_4+x_4x_3+x_3x_5+x_5x_1);$$

$$y_3 = (x_5x_2+x_2x_4+x_4x_3+x_3x_1+x_1x_5)\times (x_5x_4+x_4x_1+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_5);$$

$$y_4 = (x_2x_1+x_1x_3+x_3x_5+x_5x_4+x_4x_2)\times (x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+x_1x_5+x_5x_2);$$

$$y_5 = (x_5x_3+x_3x_2+x_2x_4+x_4x_1+x_1x_5)\times (x_5x_2+x_2x_1+x_1x_3+x_3x_4+x_4x_5);$$

$$y_6 = (x_2x_1+x_1x_4+x_4x_3+x_3x_5+x_5x_2)\times (x_2x_4+x_4x_5+x_5x_1+x_1x_3+x_3x_2).$$

Ecuația cerută are, evident, forma

$$y^6+c_1ay^5+c_2a^2y^4+c_3a^3y^3+c_4a^4y^2+(c_5a^5+c_6b^4)y+(c_7a^6+c_8ab^4)=0,$$

unde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_8$ sînt constante absolute. Pentru determinarea lor vom pune $a=-1$, $b=0$ și $a=0$, $b=-1$. Obținem, astfel

a	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
-1	0	1	i	-1	$-i$	0	1	$3-4i$	1	1	$3+4i$	1
0	-1	1	ε	ε^2	ε^3	ε^4	0	-5	$-5\varepsilon^4$	$-5\varepsilon^3$	$-5\varepsilon^2$	-5ε

In primul caz, ecuația cerută are forma:

$$(y-1)^4(y^2-6y+25)=0.$$

În al doilea caz, ea este $y^6+3\,125y=0$. De aici putem determina toți coeficienții, în afară de c_8. Se verifică ușor că $c_8=0$. Pentru aceasta putem lua, de exemplu, $a=-5$, $b=4$. În acest caz, $x_1=x_2=1$, iar celelalte rădăcini satisfac ecuația $x^3+2x^2+3x+4=0$ și toate calculele necesare se fac fără nici o dificultate.

818. Fie $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt variabile independente. Fie, mai departe,

$$x^{k-1}\varphi(x)=f(x)q_k(x)+r_k(x) \text{ și } r_k(x)=c_{k1}+c_{k2}x+\ldots+c_{kn}x^{n-1}$$

Coeficienții $c_{k,s}$ sînt, evident, polinoame de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Apoi

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r_1(x_1) & r_1(x_2) & \ldots & r_1(x_n) \\ r_2(x_1) & r_2(x_2) & \ldots & r_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_n(x_1) & r_n(x_2) & \ldots & r_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \ldots & \varphi(x_n) \\ x_1\varphi(x_1) & x_2\varphi(x_2) & \ldots & x_n\varphi(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1}\varphi(x_1) & x_2^{n-1}\varphi(x_2) & \ldots & x_n^{n-1}\varphi(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

de unde rezultă

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) = R(f, \varphi).$$

Ultima egalitate este o identitate între două polinoame în $x_1, x_2, \dots, x_n$ şi de aceea rămîne valabilă pentru toate valorile particulare ale acestor variabile.

819. Să arătăm, în primul rînd, că toate polinoamele $\psi_k(x)$ au gradul $n-1$. Pentru aceasta, vom introduce următoarele notaţii

$$\begin{aligned} f_k(x) &= a_0x^{k-1} + \dots + a_{k-1}; \\ \bar{f}_k(x) &= a_kx^{n-k} + \dots + a_n; \\ \varphi_k(x) &= b_0x^{k-1} + \dots + b_{k-1}; \\ \bar{\varphi}_k(x) &= b_kx^{n-k} + \dots + b_n. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{n-k+1}f_k(x) + \bar{f}_k(x); \\ \varphi(x) &= x^{n-k+1}\varphi_k(x) + \bar{\varphi}_k(x); \\ \psi_k(x) &= f_k(x)[x^{n-k+1}\varphi_k(x) + \bar{\varphi}_k(x)] - \\ &- \varphi_k(x)[x^{n-k+1}f_k(x) + \bar{f}_k(x)] = f_k(x)\bar{\varphi}_k - \varphi_k\bar{f}_k(x) = \\ &= (a_0b_k - b_0a_k)x^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Fie $\psi_k(x) = c_{k1} + c_{k2}x + \dots + c_{kn}x^{n-1}$ şi fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ rădăcinile polinomului $f(x)$. Atunci

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \dots & \psi_1(x_n) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \dots & \psi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(x_1) & \psi_n(x_2) & \dots & \psi_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x_1)\varphi(x_1) & f_1(x_2)\varphi(x_2) & \dots & f_1(x_n)\varphi(x_n) \\ f_2(x_1)\varphi(x_1) & f_2(x_2)\varphi(x_2) & \dots & f_2(x_n)\varphi(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1)\varphi(x_1) & f_n(x_2)\varphi(x_2) & \dots & f_n(x_n)\varphi(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) \cdot \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) \times \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)a_0^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

de unde

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = a_0^n \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) = R(f,\varphi).$$

820. Polinoamele χ_k au grade cel mult egale cu $n-1$. Acest lucru este, evident, valabil pentru $1 \leqslant k \leqslant n-m$, iar pentru $k > n-m$, aceasta rezultă din faptul că χ_k sînt polinoamele lui Bézout ψ_{k-n+m} pentru $f(x)$ și $x^{n-m}\varphi(x)$. Fie $\chi_k(x) = c_{k1} + c_{k2}x + \dots + c_{kn}x^{n-1}$ și

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Atunci

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \Delta = \begin{vmatrix} \chi_1(x_1) & \chi_1(x_2) & \dots & \chi_1(x_n) \\ \chi_2(x_1) & \chi_2(x_2) & \dots & \chi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(x_1) & \chi_n(x_2) & \dots & \chi_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-m-1} & x_2^{n-m-1} & \dots & x_n^{n-m-1} \\ x_1^{n-m} f_0(x_1) & x_2^{n-m} f_0(x_2) & \dots & x_n^{n-m} f_0(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-m} f_{m-1}(x_1) & x_2^{n-m} f_{m-1}(x_2) & \dots & x_n^{n-m} f_{m-1}(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)\Delta \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & a_0 & \\ & & a_1 & a_0 \\ & & \dots & \dots \\ & & a_{m-1} & a_{m-2} \dots a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_0^m \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)\Delta,$$

de unde deducem direct rezultatul cerut.

821. a) -7; b) 243; c) 0; d) -59; e) 4 854; f) $(b_0a_2 - b_2a_0)^2 - (b_0a_1 - b_1a_0)(b_1a_2 - b_2a_1)$.

822. a) Pentru $\lambda = 3$ şi $\lambda = -1$.

b) $\lambda = 1$; $\lambda = \dfrac{-2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$,

$\lambda = \dfrac{-2 - \sqrt{2} \pm i\sqrt{4\sqrt{2} + 2}}{2}$;

c) $\lambda = \pm\sqrt{-2}$; $\lambda = \pm\sqrt{-12}$.

823. a) $y^6-4y^4+3y^2-12y+12=0$;
b) $5y^5-7y^4+6y^3-2y^2-y-1=0$;
c) $y^3+4y^2-y-4=0$.

824. a) $x_1=1$ $x_2=2$ $x_3=0$ $x_4=-2$;
$y_1=2$; $y_2=3$; $y_3=-1$; $y_4=1$.
b) $x_1=0$ $x_2=3$ $x_3=2$ $x_4=2$;
$y_1=1$; $y_2=0$; $y_3=2$; $y_4=-1$.
c) $x_1=1$ $x_2=1$ $x_3=-1$ $x_4=2$
$y_1=-1$; $y_2=-1$; $y_3=1$; $y_4=2$
d) $x_1=0$ $x_2=0$ $x_3=1$ $x_4=1$ $x_{5,6}=2$
$y_1=1$; $y_2=3$; $y_3=2$; $y_4=3$; $y_{5,6}=1\pm i\sqrt{2}$.
e) $x_1=0$ $x_2=0$ $x_3=2$ $x_4=x_5=2$; $x_6=-4$;
$y_1=2$; $y_2=-2$; $y_3=0$; $y_4=y_5=2$; $y_6=2$
$x_7=4$; $x_8=-6$; $x_9=-{}^2/_3$.
$y_7=6$; $y_8=4$; $y_9={}^4/_3$

825. $a_0^n a_n^{n-1}$.

826. Fie $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$;
$\varphi_1(x)=b_0x^k+\ldots+b_k$; $\varphi_2(x)=c_0x^m+\ldots+c_m$.

Atunci

$$R(f,\ \varphi_1\cdot\varphi_2)=a_0^{m+k}\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\,\varphi_2(x_i)=$$

$$=\left[a_0^m\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\right]\left[a_0^k\prod_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\right]=R(f,\varphi_1)\cdot R(f,\varphi_2).$$

827. Este interesant să examinăm numai cazul $n>2$. Să notăm cu d cel mai mare divizor comun al lui m și n; cu $\xi_1, \xi_2, \ldots$, rădăcinile primitive de ordinul n ale unității; cu $\eta_1\ \eta_2, \ldots$, rădăcinile primitive de ordinul $\frac{n}{d}=n_1$ ale unității.

Atunci

$$R(X_n, x^m-1)=\prod(\xi_i^m-1)=\prod(1-\xi_i^m)=$$

$$=\left[\prod(1-\eta_i)\right]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}}\left[X_{n_1}(1)\right]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}}.$$

Dacă m este divizibil cu n, atunci $R(X_n,x^m-1)=0$. Dacă m nu este divizibil cu n, atunci $n_1\neq 1$ și, în virtutea problemei

123, $X_{n_1}(1)=1$ pentru $n_1 \neq p^\lambda$, $X_{n_1}(1)=p$ pentru $n_1=p^\lambda$ (p fiind un număr prim). Așadar,

$$R(X_n,\ x^m-1)=0 \text{ pentru } n_1=\frac{n}{d}=1;$$

$$R(X_n,\ x^m-1)=p^{\frac{\varphi(m)}{\varphi(n_1)}} \text{ pentru } n_1=\frac{n}{d}=p^\lambda;$$

$$R(X_n,\ x^m-1)=1 \text{ în toate celelalte cazuri.}$$

828. Evident că $R(X_n, X_m)$ este un număr întreg, pozitiv, divizor al lui $R(X_n, x^m-1)$ și $R(X_m, x^n-1)$. Să notăm cu d cel mai mare divizor comun al lui m și n. Dacă m nu este divizibil cu n și n nu este divizibil cu m, atunci $\frac{m}{d}$ și $\frac{n}{d}$ sînt diferiți de 1 și primi între ei. Pe baza rezultatului problemei precedente, $R(X_n, x^m-1)$ și $R(X_m, x^n-1)$ sînt în acest caz primi între ei și, de aceea, $R(X_n, X_m)=1$.

Ne rămîne să considerăm cazul cînd unul dintre numerele m și n este divizibil cu celălalt. Pentru a fixa ideile, să presupunem că m se divide cu n.

Dacă $m=n$, atunci $R(X_m, X_n)=0$. Dacă $\frac{m}{n}$ nu este o putere a unui număr prim, atunci $R(X_m, x^n-1)=1$ și, prin urmare, $R(X_m, X_n)=1$. Să admitem, în sfîrșit, că $m=np^\lambda$.

Atunci

$$R(X_m, X_n)=\prod_{\delta/n} R(X_m, x^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Toți factorii din membrul al doilea sînt egali cu unitatea, în afară de cei pentru care $\frac{m}{\delta}$ este o putere a numărului p.

Dacă n nu este divizibil cu p, atunci există un singur factor diferit de unitate, și anume cel pentru care $\delta=n$ și

$$R(X_m, X_n)=R(X_m, x^n-1)=p^{\frac{\varphi(m)}{\varphi(m/n)}}=p^{\varphi(n)}.$$

Dacă n este divizibil cu p, atunci vor exista doi factori diferiți de unitate: pentru $\delta=n$ și $\delta=\frac{n}{p}$. Atunci,

$$R(X_m, X_n) = \frac{R(X_m, x^n - 1)}{R(X_m, x^{n/p} - 1)} = p^{\frac{\varphi(m)}{\varphi(mn)} - \frac{\varphi(m)}{\varphi(mp/n)}} =$$

$$= p^{\varphi(m)\left[\frac{1}{p^{\lambda-1}(p-1)} - \frac{1}{p^{\lambda}(p-1)}\right]} = p^{\frac{\varphi(m)}{p^{\lambda}}} = p^{\varphi(n)}.$$

Așa dar, $R(X_m, X_n) = 0$ pentru $m = n$;
$R(X_m, X_n) = p^{\varphi(n)}$ pentru $m = np^{\lambda}$;
$R(X_m, X_n) = 1$ în toate celelalte cazuri.

829. a) 49; b) -107; c) -843; d) 725; e) 2777.

830. a) $3125 \cdot (b^2 - 4a^5)^2$; b) $\lambda^4(4\lambda - 27)^3$;
c) $(b^2 - 3ab + 9a^2)^2$; d) $4(\lambda^2 - 8\lambda + 32)^3$.

831. a) $\lambda = \pm 2$; b) $\lambda_1 = 3$; $\lambda_{2,3} = 3\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$;

c) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -3$; $\lambda_3 = 125$;

d) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$; $\lambda_{3,4} = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2} i\sqrt{3}$.

832. În cazul general, dacă discriminantul este pozitiv, numărul perechilor de rădăcini complex conjugate este par, iar dacă determinantul este negativ, acest număr este impar.

În particular, pentru un polinom de gradul al treilea, dacă $D > 0$, atunci toate rădăcinile sînt reale, iar dacă $D < 0$, două rădăcini sînt complex conjugate.

Pentru un polinom de gradul al patrulea, pentru $D > 0$, sau toate rădăcinile sînt reale, sau toate rădăcinile sînt complexe. Pentru $D < 0$ există două rădăcini reale și o pereche de rădăcini complex conjugate.

833. $f = x^n + a$; $f' = nx^{n-1}$;

$$R(f', f) = n^n a^{n-1}; \quad D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}.$$

834. $f = x^n + px + q$; $f' = nx^{n-1} + p$;

$$R(f', f) = n^n \prod_{k=0}^{n-2}\left(q + \frac{n-1}{n} p \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\,\varepsilon^k\right),$$

unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n-1} + i \sin\frac{2\pi}{n-1}$.

$$R(f', f) = n^n\left(q^{n-1} + \frac{(n-1)^{n-1}p^{n-1}}{n^{n-1}} \cdot \left(-\frac{p}{n}\right)(-1)^{n-2}\right) =$$

$$= n^n q^{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}p^n;$$

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n q^{n-1} + (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-1)^{n-1} p^n.$$

835. Să presupunem că cel mai mare divizor comun al numerelor m și n este egal cu d. Să introducem notațiile: $m_1 = \frac{m}{d}$, $n_1 = \frac{n}{d}$ și fie ε o rădăcină primitivă de ordinul n a unității, η o rădăcină primitivă de ordinul n_1 a unității, $a_0x^{m+n} + a_1x^m + a_2 = f(x)$. Atunci $f'(x) = (m+n)a_0x^{n+m-1} + ma_1x^{m-1}$. Rădăcinile derivatei sînt $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{m-1} = 0$;

$$\xi_{m+k} = \sqrt[n]{-\frac{ma_1}{(m+n)a_0}}\,\varepsilon^k = \xi_m\varepsilon^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Mai departe,

$$R(f', f) = (m+n)^{m+n}a_0^{m+n}a_2^{m-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[a_2 + \frac{na_1}{m+n}\xi_m^m\varepsilon^{km}\right] =$$

$$= (m+n)^{m+n}a_0^{m+n}a_2^{m-1}\left[\prod_{k=0}^{n_1-1}\left(a_2 + \frac{na_1}{m+n}\right)\xi_m^m\eta^k\right]^d =$$

$$= (m+n)^{m+n}a_0^{m+n}a_2^{m-1}\left[a_2^{n_1} + (-1)^{m_1+n_1-1}\frac{n^{n_1}m^{m_1}a_1^{m_1+n_1}}{(m+n)^{m_1+n_1}a_0^{m_1}}\right]^d =$$

$$= a_0^n a_2^{m-1}\left[(m+n)^{m_1+n_1}a_0^{m_1}a_2^{n_1} + (-1)^{m_1+n_1-1}n^{n_1}m^{m_1}a_1^{m_1+n_1}\right]^d,$$

și, prin urmare,

$$D(f) = (-1)^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} a_0^{n-1}a_2^{m-1}\left[(m+n)^{m_1+n_1}a_0^{m_1}a_2^{n_1} + (-1)^{m_1+n_1-1}n^{n_1}m^{m_1}a_1^{m_1+n_1}\right]^d.$$

836. Discriminanții sînt egali.

837. $x_1x_2 + x_3x_4 - x_1x_3 - x_2x_4 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$;

$x_1x_3 + x_2x_4 - x_1x_4 - x_2x_3 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$;

$x_1x_4 + x_2x_3 - x_1x_2 - x_3x_4 = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2)$.

Ridicînd aceste egalităţi la pătrat şi înmulţindu-le între ele, obţinem rezultatul cerut.

838. Fie $f(x)=a_0(x-x_1)\ (x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)$. Atunci

$$D[f(x)(x-a)] = a_0^{2n}(a-x_1)^2\ (a-x_2)^2\ \ldots\ (a-x_n)^2 \prod_{i<k}(x_i-x_k)^2 = \\ = D(f(x))\,[f(a)]^2$$

839. Să notăm $\varphi(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$. Atunci $(x-1)\,\varphi(x) = x^n - 1$, de unde

$$D(\varphi)\,[\varphi(1)]^2 = D(x^n-1) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n.$$

Prin urmare, $D(\varphi) = [-1]^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^{n-2}$.

840. Fie $\varphi(x) = x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a$. Atunci $\varphi(x)\ (x-1) = x^{n+1} + (a-1)x^n - a$. Prin urmare

$$(na+1)^2\,D(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{n-1}[(n+1)^{n+1}a + n^n(1-a)^{n+1}].$$

Aşadar

$$D(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{n-1}\,\frac{(n+1)^{n+1}a + n^n(1-a)^{n+1}}{(1+na)^2}.$$

841. Fie $f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)$;
$\varphi(x) = b_0(x-y_1)(x-y_2)\ \ldots\ (x-y_m)$.

Atunci

$$D(f\varphi) = (a_0b_0)^{2m+2n-2} \prod_{i<k}(x_i-x_k)^2 \prod_{i<k}(y_i-y_k)^2 \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(x_i-y_k)^2 = \\ = a_0^{2n-2} \prod_{i<k}(x_i-x_k)^2\, b_0^{2m-2} \times$$

$$\times \prod_{i<k}(y_i-y_k)^2 \Big[a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(x_i-y_k)\Big]^2 = D(f)\,D(\varphi)\,[R(f,\varphi)]^2.$$

842. $X_{pm}(x^{p^{m-1}}-1) = x^{p^m}-1$. Prin urmare,

$$D(X_{pm})\,D(x^{p^{m-1}}-1)\,[R(x^{p^{m-1}}-1,\ X_{pm})]^2 = D(x^{p^m}-1).$$

Substituind valorile mărimilor cunoscute, obţinem

$$D(X_{pm}) = p^{mp^m-(m+1)p^{m-1}}(-1)^{\frac{1}{2}p^{m-1}(p-1)}.$$

843. $X_n = \prod_{\delta/n} (x^\delta - 1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)} = (x^n - 1) \prod_{\substack{\delta/n \\ \delta \neq n}} (x^\delta - 1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}$

Fie ε o rădăcină a lui X_n. Atunci

$$X_n'(\varepsilon) = n\varepsilon^{n-1} \prod_{\substack{\delta/n \\ \delta \neq n}} (\varepsilon^\delta - 1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Pentru simplificarea calculelor, vom căuta, în primul rînd, valoarea absolută a discriminantului lui X_n

$$|D(X_n)| = \prod_{\varepsilon} |X_n'(\varepsilon)| = n^{\varphi(n)} \prod_{\substack{\delta/n \\ \delta \neq n}} \prod_{\varepsilon} (1 - \varepsilon^\delta)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)} =$$

$$= n^{\varphi(n)} \prod_{\substack{\delta/n \\ \delta \neq n}} [X_{\frac{n}{\delta}}(1)]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{\delta}\right)} \mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Mai departe, $X_{\frac{n}{\delta}}(1)$ este diferit de 1 dacă $\frac{n}{\delta}$ este puterea unui număr prim. Pe de altă parte, $\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)$ este diferit de 0 numai cînd $\frac{n}{\delta}$ nu se divide cu pătratul unui număr prim. Prin urmare, în ultimul produs trebuie să păstrăm numai factorii care corespund la $\frac{n}{\delta} = p_1, p_2, \ldots, p_k$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sînt divizorii primi, diferiţi ai numărului n.

Aşadar,

$$|D(X_n)| = \frac{n^{\varphi(n)}}{\prod_{p/n} p^{\frac{\varphi(n)}{p-1}}}.$$

Ţinînd seamă că toate rădăcinile lui X_n sînt complexe, semnul discriminantului este egal cu $(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}$. În cele din urmă,

$$D(X_n) = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \frac{n^{\varphi(n)}}{\prod_{p/n} p^{\varphi(n)/p-1}}.$$

844. $E_n = n!\left(1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$;

$$E_n' = n!\left(1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Prin urmare, $E_n' = E_n - x^n$;

$$R(E_n, E_n') = \prod_{i=1}^{n}(-x_i)^n = (-1)[(-1)^n n!]^n = (n!)^n;$$

$$D(E_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n!)^n.$$

845. Se poate constata ușor că

$$(nx + n - a)F_n - x(x+1)F_n' + \frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{n!} = 0.$$

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile lui F_n. Atunci

$$F_n'(x_i) = \frac{c}{x_i(x_i+1)}, \quad \text{unde } c = \frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{n!}.$$

Prin urmare,

$$R(F_n, F_n') = \frac{c^n}{\Pi x_i \Pi(x_i+1)} = \frac{c^n}{\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}\cdot\frac{(a-1)\ldots(a-n)}{n!}} =$$

$$= \frac{a^{n-1}(a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2}\ldots(a-n+1)^{n-2}(a-n)^{n-1}}{[n!]^{n-2}};$$

$$D(F_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{a^{n-1}(a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2}\ldots(a-n+1)^{n-2}(a-n)^{n-1}}{[n!]^{n-2}}.$$

846. $P_n' = nP_{n-1}$. Prin urmare, $R(P_n, P_n') = n^n R(P_n, P_{n-1})$. Mai departe

$$P_n - xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0.$$

Urmează că $P_n(\xi) = -(n-1)P_{n-2}(\xi)$, dacă ξ este rădăcină a lui P_{n-1} și de aceea,

$$R(P_n, P_{n-1}) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)^{n-1}R(P_{n-2}, P_{n-1}) =$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}R(P_{n-1}, P_{n-2}).$$

Acum este uşor să constatăm că

$$R(P_n, P_{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)^{n-1} (n-2)^{n-2} \ldots 2^2 \cdot 1.$$

În cele din urmă,

$$D(P_n) = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n .$$

847. $D(P_n) = 1 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \ldots n^{2n-1}$.

848. $D(P_n) = 2^{n-1} n^n$.

849. $D(P_n) = (n+1)^{n-1} \cdot 2^{n(n-1)}$.

850. $D(P_n) = 1 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \ldots n^{2n-1} \cdot 1^{2(n-1)} \cdot 3^{2(n-2)} \ldots (2n-3)^2$.

851. $D(P_n) = 2^2 . 3^4 \ldots n^{2n-2} \cdot (n+1)^{n-1}$.

852. Fie $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n =$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

$D(f) = \Pi (x_i - x_k)^2$. Căutăm maximul lui $D(f)$ după regula de obţinere a maximului relativ, rezolvînd sistemul de ecuaţii

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(n-1) R^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [D - \lambda (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)] = 0.$$

Se vede uşor că

$$\frac{\partial D}{\partial x_i} = \frac{D \cdot f''(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Avem astfel,

$$f''(x) D - 2\lambda x_i f'(x_i) = 0 \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Prin urmare, polinomul $f(x)$, care realizează maximul discriminantului, trebuie să verifice ecuaţia diferenţială

$$cf(x) - 2\lambda x f'(x) + Df''(x) = 0,$$

unde c este o constantă. Împărţind cu $\frac{c}{n}$ şi comparînd coeficienţii termenilor în x^n, deducem că ecuaţia diferenţială trebuie să fie de forma

$$nf(x) - xf'(x) + c'f''(x) = 0,$$

unde c' este o nouă constantă.

Comparînd coeficienţii lui x^{n-1} şi x^{n-2}, găsim $a_1 = 0$; $a_2 = -\frac{n(n-1)}{2} c'$. Acum putem determina pe c'. In adevăr,

$n(n-1)R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a_1^2 - 2a_2 = n(n-1)c'$, de unde $c' = R^2$.

Continuînd să comparăm coeficienții, găsim că $f(x)$ are forma

$$f(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2} R^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} R^4 x^{n-4} - \ldots$$

Se vede ușor că

$$f(x) = R^n P_n\left(\frac{x}{R}\right),$$

unde P_n este polinomul lui Hermite.

$$D(f) = R^{n(n-1)} 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n.$$

Acesta este maximul căutat al discriminantului.

853. $2^{2n}(-1)^n a_0 a_n [D(f)]^2$.

854. $m^{mn}(-1)^{\frac{m(m-1)n}{2}} a_0^{m-1} a_n^{m-1} [D(f)]^m$.

855. $F(x) = \prod_{i=1}^{n} (\varphi(x) - x_i)$.

Prin urmare

$$D(F) = \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x) - x_i) \left[\prod_{i<k} R(\varphi(x) - x_i, \varphi(x) - x_k)\right]^2.$$

Mai departe, evident că

$$R(\varphi(x) - x_i, \varphi(x) - x_k) = (x_i - x_k)^m.$$

De aceea

$$D(F) = \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x) - x_i) \prod_{i<k} (x_i - x_k)^{2m} = [D(f)]^m \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x) - x_i).$$

ceea ce era de demonstrat.

856. $(y+1)(y-5)(y-19) = 0$.

857. a) *Soluție.* $x^3 = 3x + 4$. Fie $y = 1 + x + x^2$, unde x este o rădăcină a ecuației date. Atunci

$$yx = x + x^2 + x^3 = x + x^2 + 3x + 4 = 4 + 4x + x^2;$$
$$yx^2 = 4x + 4x^2 + x^3 = 4x + 4x^2 + 3x + 4 = 4 + 7x + 4x^2.$$

Eliminînd pe x, obținem

$$\begin{vmatrix} 1-y & 1 & 1 \\ 4 & 4-y & 1 \\ 4 & 7 & 4-y \end{vmatrix} = 0$$

$$y^3 - 9y^2 + 9y - 9 = 0;$$

b) $y^3 - 7y^2 + 3y - 1 = 0$;

c) $y^4 + 5y^3 + 9y^2 + 7y - 6 = 0$;

d) $y^4 - 12y^3 + 43y^2 - 49y + 20 = 0$.

858. a) $y^3 - 2y^2 + 6y - 4 = 0$; $x = -\frac{y^2 - 2y + 4}{2}$;

b) $y^4 - 9y^3 + 31y^2 - 45y + 13 = 0$; $x = \frac{y^2 - 3y + 2}{3}$;

c) $y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0$; transformarea inversă nu există.

859. $y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0$.

Ecuația transformată coincide cu cea inițială. Aceasta înseamnă că printre rădăcinile ecuației inițiale există rădăcinile x_1 și x_2, legate prin relația: $x_2 = 2 - x_1^2$.

860. Fie $x_2 = \varphi(x_1)$, unde $\varphi(x_1)$ este o funcție rațională cu coeficienți raționali. Fără a restrînge din generalitate putem presupune $x_2 = ax_1^2 + bx_1 + c$. Numerele $ax_1^2 + bx_1 + c$, $ax_2^2 + bx_2 + c$, $ax_3^2 + bx_3 + c$ sînt rădăcinile unei ecuații de gradul al treilea, cu coeficienți raționali, avînd una dintre rădăcini egală cu rădăcina $x_2 = ax_1^2 + bx_1 + c$ a ecuației date. În virtutea ireductibilității ecuației date, trebuie să coincidă și celelalte rădăcini. Prin urmare, sau $ax_2^2 + bx_2 + c = x_3$, $ax_3^2 + bx_3 + c = x_1$, sau $ax_2^2 + bx_2 + c = x_1$, $ax_3^2 + bx_3 + c = x_3$. Ultima egalitate este imposibilă, deoarece x_3 nu poate fi rădăcina unei ecuații de gradul al doilea cu coeficienți raționali. Așadar, în ipoteza noastră rădăcinile ecuației date sînt legate prin relațiile

$$x_2 = ax_1^2 + bx_1 + c;$$
$$x_3 = ax_2^2 + bx_2 + c;$$
$$x_1 = ax_3^2 + bx_3 + c.$$

Prin urmare

$$\sqrt{D} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) = [ax_1^2 + (b-1)x_1 + c][ax_2^2 + (b-1)x_2 + c][ax_3^2 + (b-1)x_3 + c]$$

este un număr rațional, ca funcție simetrică cu coeficienți rationali de x_1, x_2, x_3. Am demonstrat astfel că această condiție este necesară.

Să admitem acum că discriminantul D este pătratul numărului rațional d. Atunci

$$x_2 - x_3 = \frac{d}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{d}{3x_1^2 + 2ax_1 + b}.$$

Pe de altă parte,

$$x_2 + x_3 = -a - x_1.$$

De aici rezultă că x_2 și x_3 sînt funcții raționale de x_1. Cu aceasta am demonstrat că condiția este și suficientă.

861. a) $\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$; b) $\frac{-3 + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{23}$;

c) $1 + 3\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt[4]{8}$.

862. a) $\frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{3}$; b) $17\alpha^2 - 3\alpha + 55$;

c) $3 - 10\alpha + 8\alpha^2 - 3\alpha^3$;

d) numitorul se anulează pentru una dintre rădăcinile ecuației.

863. $mx_1^2 + nx_1 + p = \frac{(pm - bm^2 + amn - n^2)x_1 + (amp - np - cm^2)}{mx_1 + ma - n}$.

864. Dacă $x_2 = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta}$, atunci $x_3 = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta}$

și

$$x_1 = \frac{\alpha x_3 + \beta}{\gamma x_3 + \delta} = \frac{(\alpha^2 + \beta\gamma)x_2 + (\alpha + \delta)\beta}{(\alpha + \delta)\gamma x_2 + (\beta\gamma + \delta^2)}.$$

Pe de altă parte, $x_1 = \frac{-\delta x_2 + \beta}{\gamma x_2 - \alpha}$, de unde rezultă că relația

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (\alpha + \delta)^2.$$

este necesară.

865. Fie

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Atunci

$$a_0x^n - a_1x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n = a_0(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n).$$

Inmulţind aceste relaţii între ele, obţinem

$$a_0^2(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots(x^2 - x_n^2) =$$
$$= (a_0x^n + a_2x^{n-2} + \ldots)^2 - (a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} + \ldots)^2.$$

De aici rezultă că pentru a efectua transformarea $y = x^2$ trebuie să înlocuim pe x^2 cu y în ecuaţia

$$(a_0x^n + a_2x^{n-2} + \ldots)^2 - (a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} + \ldots)^2 = 0.$$

866. Ecuaţia cerută se va obţine înlocuind x^3 cu y în ecuaţia

$$(a_0x^n + a_3x^{n-3} + \ldots)^3 + (a_1x^{n-1} + a_4x^{n-4} + \ldots)^3 +$$
$$+ (a_2x^{n-2} + a_5x^{n-5} + \ldots)^3 - 3(a_0x^n + a_3x^{n-3} + \ldots) \times$$
$$\times (a_1x^{n-1} + a_4x^{n-4} + \ldots)(a_2x^{n-2} + a_5x^{n-5} + \ldots) = 0.$$

867. Există numai un număr finit de polinoame $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots$ cu coeficienţi reali, ale căror rădăcini nu depăşesc în modul pe 1, deoarece este evident că coeficienţii unor astfel de polinoame trebuie să fie mărginiţi

$$|a_k| \leqslant \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Fie $f = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_n \neq 0$, unul dintre aceste polinoame şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile sale. Să notăm $f_m = (x - x_1^m)(x - x_2^m)\ldots(x - x_n^m)$. Toate polinoamele f_m au coeficienţi întregi şi toate rădăcinile lor nu depăşesc în modul pe 1. Prin urmare, prin ele există numai un număr finit de polinoame distincte. Să alegem un şir infinit de numere întregi $m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$, astfel încît $f_{m_0} = f_{m_1} = f_{m_2} = \ldots$ Aceasta înseamnă că

$$x_1^{m_i} = x_{\alpha_1}^{m_0};$$
$$x_2^{m_i} = x_{\alpha_2}^{m_0};$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_n^{m_i} = x_{\alpha_n}^{m_0};$$

unde $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ este o permutare a indicilor $1, 2, \ldots, n$. Ţinînd seamă de faptul că există o infinitate de exponenţi m_i,

iar permutări există numai în număr finit, se pot găsi doi (și chiar o infinitate) de exponenți m_{i_1} și m_{i_2} cărora le corespunde aceeași permutare $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Pentru acești exponenți au loc egalitățile

$$x_1^{m_{i_1}} = x_1^{m_{i_2}};$$
$$x_2^{m_{i_1}} = x_2^{m_{i_2}};$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_n^{m_{i_1}} = x_n^{m_{i_2}},$$

care arată că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcini de ordinul $m_{i_2} - m_{i_1}$ ale unității, deoarece $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt diferiți de zero în virtutea condiției $a_n \neq 0$.

868. Fie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polinom care își schimbă semnul la permutări impare ale variabilelor. Întrucît $F(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n) = -F(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$, rezultă că $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este divizibil cu $x_1 - x_2$. În mod analog, se demonstrează că $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este divizibil cu toate diferențele $x_i - x_k$. Prin urmare, $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ este divizibil cu $\Delta = \prod\limits_{i>k} (x_i - x_k)$, adică tocmai cu determinantul Vandermonde. Întrucît determinantul Δ își schimbă semnul la permutări impare ale variabilelor, polinomul $\frac{F}{\Delta}$ este un polinom simetric.

869. Fie $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polinom invariant la permutări pare ale variabilelor. Să notăm cu $\bar{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polinomul care se obține din $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ printr-o anumită permutare impară.

Se verifică ușor că la orice permutare impară, φ trece în $\bar{\varphi}$, iar $\bar{\varphi}$ în φ.

Prin urmare suma $\varphi + \bar{\varphi}$ este invariantă față de toate permutările, iar $\varphi - \bar{\varphi}$ își schimbă semnul la permutări impare. Mai departe,

$$\varphi = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2} + \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2} = F_1 + F_2 \Delta,$$

unde Δ este determinantul Vandermonde. Pe baza rezultatului problemei 868, F_2 este un polinom simetric. F_1 este, de

asemenea, un polinom simetric, deoarece este invariant la toate permutările variabilelor.

870. $(f_1^2 - f_2)\,\Delta$, unde f_1, f_2 sînt polinoame simetrice fundamentale de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

871. $u^3 + a(\alpha+\beta+\gamma)u^2 + [(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)b + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\times$
$\times(a^2-b)]u + c(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) + \frac{ab-3c}{2}(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 +$
$+ \beta^2\gamma + \beta\gamma^2) + \alpha\beta\gamma(a^3 - 3ab + 6c) + \frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2}\sqrt{\Delta} = 0,$

unde Δ este discriminantul ecuației date.

872. $u^3 - 3pp'u - \frac{27qq' + \sqrt{\Delta\Delta'}}{2} = 0$, unde Δ și Δ' sînt discriminanții ecuațiilor date.

873. Fie $y = ax^2 + bx + c$ transformarea lui Tschirnhaus, care leagă între ele cele două ecuații. Atunci, într-o numerotare convenabilă a rădăcinilor,

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + c(x_1 + x_2 + x_3)$$

va fi un număr rațional.

Prin urmare, una dintre ecuațiile

$$u^3 - 3pp'u - \frac{27qq' \pm \sqrt{\Delta\Delta'}}{2} = 0$$

(v. problema 872) are o rădăcină rațională. De aici rezultă că $\sqrt{\Delta\Delta'}$ va fi un număr rațional. Am demonstrat că condiția este necesară.

Reciproc, să presupunem că ecuația

$$u^3 - 3pp'u - \frac{27qq' \pm \sqrt{\Delta\Delta'}}{2} = 0 \qquad (*)$$

are o rădăcină rațională u.

Se poate arăta ușor că discriminantul ecuației (*) este egal cu $\frac{27^2}{4}(q\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta q'})^2$ și, prin urmare, diferă de $\sqrt{\Delta}$ printr-un factor egal cu pătratul unui număr rațional. Așadar, diferența $u' - u''$ a rădăcinilor a doua și a treia ale ecuației diferă de $\sqrt{\Delta}$ printr-un factor rațional.

Pentru y_1, y_2, y_3, avem sistemul de ecuații

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0;$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = u;$$

$$(x_2 - x_3)\, y_1 + (x_3 - x_1)\, y_2 + (x_1 - x_2)\, y_3 = u' - u'' = r\sqrt{\Delta}.$$

Din acest sistem rezultă

$$y_1 = \frac{-3ux_1 + (x_2 - x_3)\, r\sqrt{\Delta}}{6p}.$$

Însă, $(x_2 - x_3)\sqrt{\Delta}$ se exprimă rațional prin x_1. Am demonstrat astfel că condiția este suficientă.

874. Variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se pot exprima liniar prin $f_1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$.

Prin urmare, orice polinom în $x_1, x_2, \ldots, x_n$ poate fi reprezentat sub formă de polinom în $f_1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum A f_1^{\alpha_0} \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \ldots \eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

La o permutare circulară a variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ monomul $A f_1^{\alpha_0} \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \ldots \eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ se reproduce înmulțit cu factorul $\varepsilon^{-(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1})}$. Prin urmare, pentru ca $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ să rămînă invariabil la permutări circulare ale variabilelor este necesar și suficient ca $a_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\,\alpha_{n-1}$ să fie divizibil cu n.

875. Se poate lua f_1; η_1^n, $\eta_2 \eta_1^{-2}$, $\ldots$, $\eta_{n-1} \eta_1^{-(n-1)}$.

876. Fie $\eta_1 = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2$; $\eta_2 = x_1 + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon$, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Atunci $\frac{\eta_1^2}{\eta_2} = \varphi_1 + i\sqrt{3}\varphi_2$, unde φ_1 și φ_2 sînt funcții raționale de x_1, x_2, x_3, cu coeficienți raționali, invariante la permutări circulare ale lui x_1, x_2, x_3. Se poate vedea ușor că orice funcție rațională de x_1, x_2, x_3, invariantă la permutări circulare ale variabilelor, se exprimă rațional prin $f_1 = x_1 + x_2 + x_3$, φ_1 și φ_2.

Este suficient să demonstrăm aceasta pentru $\eta_2 \eta_1^{-2}$ și η_1^3. Avem însă

$$\eta_2 \eta_1^{-2} = \frac{1}{\varphi_1 + i\varphi_2\sqrt{3}};$$

$$\eta_1^3 = \left(\frac{\eta_1^2}{\eta_2}\right)^2 \cdot \frac{\eta_2^2}{\eta_1} = (\varphi_1 + i\varphi_2\sqrt{3})^2\,(\varphi_1 - i\varphi_2\sqrt{3}).$$

877. Pentru $n = 4$

$$\eta_1 = x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4;$$
$$\eta_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4;$$
$$\eta_3 = x_1 - ix_2 - x_3 + ix_4.$$

Să punem $\theta_1 = \eta_1\eta_3$; $\theta_2 + i\theta_3 = \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$; $\theta_2 - i\theta_3 = \frac{\eta_3\eta_2}{\eta_1}$.

θ_1, θ_2, θ_3 sînt funcții raționale cu coeficienți raționali de x_1, x_2, x_3, x_4, care rămîn invariabile la permutări circulare. Se poate vedea ușor că, împreună cu $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, ele formează un sistem de funcții fundamentale. In adevăr

$$\eta_2\eta_1^{-2} = \frac{\theta_2 - i\theta_3}{\theta_1}; \quad \eta_3\eta_1^{-3} = \frac{\theta_2 - i\theta_3}{\theta_1(\theta_2 + i\theta_3)}; \quad \eta_1^4 = \frac{\theta_1^4(\theta_2 + i\theta_3)}{\theta_2 - i\theta_3}.$$

878. Fie

$$\eta_1 = x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon^3 + x_4\varepsilon^4 + x_5;$$
$$\eta_2 = x_1\varepsilon^2 + x_2\varepsilon^4 + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon^3 + x_5;$$
$$\eta_3 = x_1\varepsilon^3 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^4 + x_4\varepsilon^2 + x_5;$$
$$\eta_4 = x_1\varepsilon^4 + x_2\varepsilon^3 + x_3\varepsilon^2 + x_4\varepsilon + x_5;$$

Să considerăm funcția rațională $\lambda_1 = \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$ și să o ordonăm după puterile lui ε, înlocuind 1 cu $-\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - \varepsilon^4$

$$\lambda_1 = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \varepsilon^4\varphi_4.$$

Coeficienții lui φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sînt numere raționale. Înlocuind ε, succesiv, cu ε^2, ε^3 și ε^4 obținem

$$\lambda_2 = \frac{\eta_2\eta_4}{\eta_1} = \varepsilon^2\varphi_1 + \varepsilon^4\varphi_2 + \varepsilon\varphi_3 + \varepsilon^3\varphi_4;$$

$$\lambda_3 = \frac{\eta_3\eta_1}{\eta_4} = \varepsilon^3\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^4\varphi_3 + \varepsilon^2\varphi_4;$$

$$\lambda_4 = \frac{\eta_4\eta_3}{\eta_2} = \varepsilon^4\varphi_1 + \varepsilon^3\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_3 + \varepsilon\varphi_4.$$

Putem lua ca „funcții fundamenatle" pe f, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. În adevăr, λ_1 λ_2, λ_3, λ_4, se exprimă rațional prin aceste funcții. După aceea

$$\eta_2\ \eta_1^{-2} = \lambda_1^{-1}\lambda_2\ \lambda_4^{-1};$$
$$\eta_3\ \eta_1^{-3} = \lambda_1^{-2}\lambda_2\ \lambda_4^{-1};$$
$$\eta_4\ \eta_1^{-4} = \lambda_1^{-2}\lambda_2\ \lambda_3^{-1}\ \lambda_4^{-1};$$
$$\eta_1^5 \qquad = \lambda_1^3\ \lambda_2^{-1}\lambda_3\ \lambda_4^2.$$

CAPITOLUL VII

ALGEBRA LINIARA

879. a) Numărul dimensiunilor $r = 2$. Baza, de exemplu X_1 şi X_2;

b) $r = 2$; o bază este formată, de exemplu, de X_1 şi X_2;

c) $r = 2$; o bază este formată, de exemplu, de X_1 şi X_2.

880. a) Numărul dimensiunilor intersecţiei este egal cu 1; vectorul de bază

$$Z = (5, -2, -3, -4) = X_1 - 4X_2 = 3Y_1 - Y_2.$$

Numărul dimensiunilor este egal cu 3; baza este formată, de exemplu, din vectorii Z, X_1, Y_1.

b) Suma coincide cu primul spaţiu, iar intersecţia, cu cel de al doilea.

c) Suma este spaţiul total cu patru dimensiuni, iar intersecţia este formată numai din vectorul nul.

881. a) $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$; b) $(1, 0, -1, 0)$.

882. a) $x_1' = \frac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{2}$, $x_2' = \frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{2}$,

$x_3' = \frac{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}{2}$, $x_4' = \frac{-x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}$;

b) $x_1' = x_2 - x_3 + x_4$, $x_2' = -x_1 + x_2$, $x_3' = x_4$,

$x_4' = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$.

883. $x_1'x_2' + x_3'x_4' = \frac{1}{8}$.

884. Fie $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos^2 x + \ldots + a_n \cos^n x = b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_n \cos nx$.

Atunci $a_0 = b_0 - b_2 + b_4 - \ldots$,

$$a_k = 2^{k-1}\left[b_k + \sum_{1 \leqslant p \leqslant \frac{n-k}{2}} (-1)^p \frac{(k+2p)(k+p-1)(k+p-2)\ldots(k+1)}{p!} b_{k+2p}\right],$$

$$b_0 = a_0 + \sum_{1 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}} 2^{-2p} C_{2p}^p a_{2p},$$

$$b_k = 2^{1-k}\left[a_k + \sum_{1 \leqslant p \leqslant \frac{n-k}{2}} 2^{-2p} C_{k+2p}^p a_{k+2p}\right]$$

885. Punctul de intersecţie cu prima dreaptă are coordonatele $\left(\frac{14}{3}, \frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9}\right)$, iar cu cea de a doua, (42, 1, 7, 11).

886. Dreptele $X_0 + tX_1$, $Y_0 + tY_1$, sînt conţinute în varietatea $X_0 + t(Y_0 - X_0) + t_1X_1 + t_2Y_1$.

887. Pentru ca problema să aibă o soluţie pentru dreptele $X_0 + tX_1$, $Y_0 + tY_1$, este necesar şi suficient ca vectorii X_0 Y_0, X_1, Y_1 să fie liniar dependenţi. Aceasta este echivalent cu a spune că dreptele pot fi cufundate într-un spaţiu tridimensional care conţine originea.

888. Planele $X_0 + t_1X_1 + t_2X_2$ şi $Y_0 + t_1Y_1 + t_2Y_2$ pot fi cufundate în varietatea $X_0 + t(Y_0 - X_0) + t_1X_1 + t_2X_2 + t_3Y_1 + t_4Y_2$.

889. Există şase astfel de cazuri.

1) Planele nu au puncte comune şi nu pot fi cufundate într-o varietate liniară cvadridimensională (planele sînt absolut strîmbe).

2) Planele nu au puncte comune, sînt conţinute într-o varietate cvadridimensională, însă nu pot fi cufundate într-o varietate tridimensională (ele sînt strîmbe paralel cu o dreaptă).

3) Planele nu au puncte comune şi se pot cufunda într-o varietate tridimensională (plane paralele).

4) Planele au un singur punct comun. În acest caz, ele se pot cufunda într-o varietate cvadridimensională, dar nu se pot cufunda într-o varietate tridimensională.

5) Planele se taie după o dreaptă.

6) Planele coincid.

În spaţiul tridimensional se pot realiza numai cazurile 3, 5, 6.

890. Fie $Q = X_0 + P$ o varietate liniară, iar P un spaţiu liniar. Dacă $X_1 \in Q$ şi $X_2 \in Q$, atunci $X_1 = X_0 + Y_1$, $X_2 = X_0 + Y_2$, unde Y_1 şi Y_2 aparţin lui P. În acest caz, pentru orice α, $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 = X_0 + \alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2 \in Q$. Reciproc, fie Q o mulţime de vectori care, împreună cu vectorii X_1, X_2, conţine şi combinaţia lor liniară $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2$ pentru orice α. Fie X_0 un vector fix din Q, iar P — mulţimea tuturor vectorilor $Y = X - X_0$. Dacă $Y \in P$, atunci pentru orice c, $cY \in P$, deoarece $cY = cX + (1-c)X_0 - X_0$. Mai departe, dacă $Y_1 = X_1 - X_0 \in P$, iar $Y_2 = X_2 - X_0 \in P$, atunci pentru orice α, $\alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2 = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 - X_0 \in P$. Să fixăm acum un α, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ şi să

luăm c_1, c_2 arbitrari. Atunci $\frac{c_1}{\alpha} Y_1 \in P, \frac{c_2}{1-\alpha} Y_2 \in P$ pentru orice Y_1, $Y_2 \in P$ şi, prin urmare,

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = \alpha \frac{c_1}{\alpha} Y_1 + (1-\alpha) \frac{c_2}{1-\alpha} Y_2 \in P.$$

Aşadar, P este un spaţiu liniar, iar Q este o varietate liniară.

Observaţie. Rezultatul nu mai este valabil dacă corpul fundamental este corpul claselor de resturi după modulul 2.

891. a) 9; b) 0.

892. a) 90°; b) 45°; c) $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{77}}$.

893. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

894. $\cos A = \frac{5}{\sqrt{39}}$; $\cos B = \frac{8}{\sqrt{78}}$; $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

895. $\sqrt{n}$.

896. Pentru n impar nu există diagonale ortogonale. Pentru $n=2m$, numărul diagonalelor ortogonale la o diagonală dată este egal cu C_{2m-1}^{m-1}.

897. Coordonatele punctelor sînt date în liniile marticei

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \sqrt{\frac{3}{4}}, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{\sqrt{12}}, & \sqrt{\frac{4}{6}}, \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{\sqrt{12}}, & \frac{1}{\sqrt{24}}, \ldots, & \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}}, & \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \end{pmatrix}$$

898. $R = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$.

Coordonatele centrului sînt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}}, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)n}}\right)$.

899. $\left(\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$.

900. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

901. Pentru ceilalţi doi vectori putem lua, de exemplu, $\frac{1}{\sqrt{26}}(0,-4,3,1)$ şi $\frac{1}{3\sqrt{26}}(-13,5,6,2)$.

902. $(1,2,1,3)$; $(10,-1,1,-3)$; $(19,-87,-61,72)$.

903. De exemplu $\begin{pmatrix} 0, & 7, & 3, & -4, & -2 \\ 39, & -37, & 51, & -29, & 5 \end{pmatrix}$.

904. Sistemul se interpretează ca problema determinării unor vectori orotogonali la sistemul de vectori care reprezintă coeficienţii ecuaţiei. Mulţimea vectorilor căutaţi formează un spaţiu, care este complementul ortogonal al spaţiului generat de vectorii daţi. Un sistem fundamentul de soluţii este o bază a spaţiului vectorilor căutaţi.

905. De exemplu, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,-1)$; $\frac{1}{\sqrt{498}}(1,12,8,17)$.

906. a) $X'=(3,1,-1,-2)\in P$; b) $X'=(1,7,3,3)\in P$;
$X''=(2,1,-1,4)\perp P$; $X''=(-4,-2,6,0)\perp P$.

907. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_m$ vectori liniar independenţi, iar P spaţiul construit pe aceşti vectori. Să presupunem apoi $X=Y+Z$, $Y\in P$, $Z\perp P$.

Să punem $Y=c_1A_1+c_2A_2+\ldots+c_mA_m$. Să formăm sistemul de ecuaţii pentru determinarea lui $c_1, c_2, \ldots, c_m$, înmulţind scalar ultima egalitate cu A_i, $i=1,2,\ldots,m$ şi ţinînd seamă de faptul că $YA_i=XA_i$. Obţinem

$$\begin{aligned} c_1A_1^2 &+ c_2A_1A_2 + \ldots + c_mA_1A_m = XA_1, \\ c_1A_2A_1 &+ c_2A_2^2 + \ldots + c_mA_2A_m = XA_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1A_mA_1 &+ c_2A_mA_2 + \ldots + c_mA_m^2 = XA_m. \end{aligned}$$

Datorită faptului că $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sînt liniar independenţi, determinantul Δ al acestui sistem este diferit de zero.

Să găsim pe $c_1, c_2, \ldots, c_m$ şi să le substituim în expresia lui Y. Obţinem.

$$Y=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0, & -A_1, & -A_2, & \ldots, & -A_m \\ XA_1, & A_1^2, & A_1A_2, & \ldots, & A_1A_m \\ XA_2, & A_2A_1, & A_2^2, & \ldots, & A_2A_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ XA_m, & A_mA_1, & A_mA_2, & \ldots, & A_m^2 \end{vmatrix}$$

şi

$$Z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X, & A_1, & A_2, & \ldots, & A_m \\ A_1X, & A_1^2, & A_1A_2, & \ldots, & A_1A_m \\ A_2X, & A_2A_1, & A_2^2, & \ldots, & A_2A_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_mX, & A_mA_1, & A_mA_2, & \ldots, & A_m^2 \end{vmatrix}$$

Aceste egalităţi trebuie înţelese în sensul că vectorii Y şi Z sînt combinaţii liniare ale vectorilor aflaţi în prima linie, cu coeficienţi egali cu complementii algebrici corespunzători.

De aici obţinem, în sfîrşit,

$$Y^2=Y(X-Z)=YX=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0, & -XA_1, & -XA_2, & \ldots, & -XA_m \\ A_1X, & A_1^2, & A_1A_2, & \ldots, & A_1A_m \\ A_2X, & A_2A_1, & A_2^2, & \ldots, & A_2A_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_mX, & A_mA_1, & A_mA_2, & \ldots, & A_m^2 \end{vmatrix}$$

$$Z^2=Z(X-Y)=ZX=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X^2, & XA_1, & XA_2, & \ldots, & XA_m \\ A_1X, & A_1^2, & A_1A_2, & \ldots, & A_1A_m \\ A_2X, & A_2A_1, & A_2^2, & \ldots, & A_2A_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_mX, & A_mA_1, & A_mA_2, & \ldots, & A_m^2 \end{vmatrix}$$

908. Fie Y un vector oarecare al spaţiului P, iar X', proiecţia ortogonală a vectorului X pe P. Atunci

$$\cos(X, Y)=\frac{XY}{|X|\cdot|Y|}=\frac{X'Y}{|X|\cdot|Y|}=\frac{|X'|\cdot|Y|\cdot\cos(X', Y)}{|X|\cdot|Y|}=$$
$$=\frac{|X'|}{|X|}\cos(X', Y),$$

de unde rezltă că valoarea maximă a lui $\cos(X, Y)$ este atinsă pentru acei Y pentru care $\cos(X', Y)=1$, adică pentru $Y=\alpha X'$ cu $\alpha>0$.

909. a) 45°; b) 90°. **910.** $\sqrt{\frac{m}{n}}$.

911. $|X-Y|^2=|(X-X')+(X'-Y)|^2=|X-X'|^2+|X'-Y|^2\geqslant |X-X'|^2$, egalitatea fiind posibilă numai pentru $Y=X'$.

912. a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **913.** $\frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots 2n\sqrt{2n+1}}$.

914. Distanța minimă căutată este egală cu distanța minimă dela punctul X_0-Y_0 la spațiul $P+Q$.

915. Să presupunem că unul dintre vîrfuri se află în origine și fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vectorii duși din origine în celelalte vîrfuri. Se vede ușor că $X_i^2=1$, $X_iX_j=\frac{1}{2}$. Variatatea care trece prin primele $m+1$ vîrfuri este spațiul $t_1X_1+\ldots+t_mX_m$. Varietatea care trece prin celelalte $n-m$ vîrfuri este $X_n+t_{m+1}\times$ $\times(X_{m+1}-X_n)+\ldots+t_{n-1}(X_{n-1}-X_n)$. Distanța minimă căutată este distanța dela X_n la spațiul P, generat de vectorii $X_1, X_2, \ldots, X_m, X_n-X_{m+1}, \ldots, X_n-X_{n-1}$.

Fie

$$X_n=t_1X_1+\ldots+t_mX_m+t_{m+1}(X_n-X_{m+1})+\ldots+ \\ +t_{n-1}(X_n-X_{n-1})+Y,$$

unde $Y\perp P$. Formînd produsul scalar al lui X_n cu $X_1, \ldots, X_m, X_n-X_{m+1}, \ldots, X_n-X_{n-1}$, obținem pentru determinarea lui $t_1, \ldots, t_{n-1}$ sistemul de ecuații

$$t_1+\frac{1}{2}t_2+\ldots+\frac{1}{2}t_m=\frac{1}{2}, \quad t_{m+1}+\frac{1}{2}t_{m+2}+\ldots+\frac{1}{2}t_{n-1}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}t_1+t_2+\ldots+\frac{1}{2}t_m=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}t_{m+1}+t_{m+2}+\ldots+\frac{1}{2}t_{n-1}=\frac{1}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2+\ldots+t_m=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}t_{m+1}+\frac{1}{2}t_{m+2}+\ldots+t_{n-1}=\frac{1}{2},$$

de unde, $t_1=t_2=\ldots=t_m=\frac{1}{m+1}$, $t_{m+1}=t_{m+2}=\ldots=t_{n-1}=\frac{1}{n-m}$.

Prin urmare, $Y=\frac{X_{m+1}+X_{m+2}+\ldots+X_n}{n-m}-\frac{X_1+X_2+\ldots+X_m}{m+1}$.

Așadar, perpendiculara comună este vectorul care unește centrele fețelor alese.

Distanța cea mai scurtă este egală cu lungimea acestui vector

$$|Y|=\sqrt{\frac{(n+1)}{2(n-m)(m+1)}}$$

916. a) Proiecția vectorului $(t_1+2t_2, t_1-2t_2, t_1+5t_2, t_1+2t_2)$ pe primul plan este $(t_1+2t_2, t_1-2t_2, 0, 0)$. Prin urmare, $\cos^2\varphi=$ $=\frac{2t_1^2+8t_2^2}{4t_1^2+14t_1t_2+37t_2^2}=\frac{2\lambda^2+8}{4\lambda^2+14\lambda+37}$, unde $\lambda=\frac{t_1}{t_2}$. Această

expresie își atinge maximul, egal cu $\frac{8}{9}$, pentru $\lambda = -4$.

b) Unghiul dintre un vector oarecare din planul al doilea și proiecția lui ortogonală pe primul plan rămîne neschimbat și este egal cu $\frac{\pi}{4}$.

917. Cubul este mulțimea punctelor ale căror coordonate satisfac inegalitățile $-\frac{a}{2} \leqslant x_i \leqslant \frac{a}{2}$, $i=1, 2, 3, 4$. Aici a este lungimea muchiei cubului. Să trecem la axe noi, luînd ca vectori de coordonate $e_1' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ și $e_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Acești vectori sînt ortonormați și direcțiile lor coincid cu direcțiile unor diagonale ale cubului. Coordonatele punctelor cubului față de aceste axe satisfac inegalitățile

$$-a \leqslant x_1' + x_2' + x_3' + x_4' \leqslant a, \qquad -a \leqslant x_1' + x_2' - x_3' - x_4' \leqslant a,$$
$$-a \leqslant x_1' - x_2' + x_3' - x_4' \leqslant a, \qquad -a \leqslant x_1' - x_2' - x_3' + x_4' \leqslant a.$$

Intersecția care ne interesează se obține punînd $x_1' = 0$. Ea reprezintă un corp situat în spațiul construit pe e_2', e_3', e_4'. Coordonatele punctelor acestui corp satisfac inegalitățile: $\pm x_2' \pm x_3' \pm x_4' \leqslant a$.

El este un octaedru regulat, mărginit de plane care determină pe axe segmente de lungime a.

918. $$V^2[B_1, B_2, \ldots, B_m] = \begin{vmatrix} B_1^2, & B_1B_2, & \ldots, & B_1B_m \\ B_2B_1, & B_2^2, & \ldots, & B_2B_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_mB_1, & B_mB_2, & \ldots, & B_m^2 \end{vmatrix}.$$

Această formulă se stabilește ușor prin inducție, ținînd seamă de rezultatul problemei 907. Din formulă rezultă imediat că volumul nu depinde de modul de numerotare a vîrfurilor și că $V[cB_1, B_2, \ldots, B_m] = |c| \cdot V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$.

Fie acum $B_1 = B_1' + B_1''$, C_1, C_1', C_1'' proiecțiile ortogonale ale vectorilor B_1, B_1' și B_1'' pe spațiul care este complementul ortogonal al lui $(B_2, \ldots, B_m)$. Evident că $C_1 = C_1' + C_1''$.

Prin definiție
$V[B_1, B_2, \ldots, B_m] = |C_1| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$, $V[B_1', B_2, \ldots, B_m] = |C_1'| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$, $V[B_1'', B_2, \ldots, B_m] = |C_1''| V[B_2, \ldots, B_m]$. Întrucît $|C_1| \leqslant |C_1'| + |C_1''|$, avem $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] \leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m] + V[B_1'', B_2, \ldots, B_m]$. Semnul de egalitate este posibil numai dacă C_1 și C_1' sînt coliniari și de același sens, fapt care se întîmplă atunci și numai atunci, cînd B_1', B_1'' sînt situați în spațiul determinat de $B_1, B_2, \ldots, B_m$ iar coeficienții lui B_1 din expresiile lui B_1' și B_1'', în funcție de $B_1, B_2, \ldots, B_m$, au aceleași semne (adică B_1', B_1'' sînt situați „de aceeași parte" a spațiului $(B_2, \ldots, B_m)$ în spațiul $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$.

919. $$V^2[B_1, B_2, \ldots, B_n] = \begin{vmatrix} B_1^2, & B_1B_2, & \ldots, & B_1B_n \\ B_2B_1, & B_2^2, & \ldots, & B_2B_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_nB_1, & B_nB_2, & \ldots, & B_n^2 \end{vmatrix} = |\overline{B}B| = |B|^2,$$

unde B este o matrice avînd pe coloane coordonatele vectorilor $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

920. Direct din definiție rezultă următoarele două proprietăți ale volumului:

d) $V[B_1 + X, B_2, \ldots, B_m] = V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$ pentru orice X care aparține spațiului $(B_2, \ldots, B_m)$, deoarece punctele B_1, $B_1 + X$ sînt situate la distanța egală de $(B_2, \ldots, B_m)$.

e) $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] \leqslant |B_1| \cdot V[B_2, \ldots, B_m)$. Aceasta rezultă din faptul că „înălțimea", adică lungimea componentei ortogonale pe $(B_2, \ldots, B_m)$ a vectorului B_1 nu depășește lungimea vectorului B_1.

Fie acum $C_1, C_2, \ldots, C_m$ proiecțiile ortogonale ale vectorilor $B_1, B_2, \ldots, B_m$ pe spațiul P. Să presupunem că inegalitatea $V[C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$ a fost demonstrată. Să notăm cu B_1' componenta ortogonală pe $(B_2 \ldots, B_m)$ a vectorului B_1, iar cu C_1' proiecția ei pe P. Din faptul că $B_1' - B_1 \in (B_2, \ldots, B_m)$, rezultă $C_1' - C \in (C_2, \ldots, C_m)$ și, prin urmare, $V[C_1, C_2, \ldots, C_m] = V[C_1', C_2, \ldots, C_m] \leqslant |C_1'| V[C_2, \ldots, C_m]$. Este, însă, evident că $|C_1'| \leqslant |B_1'|$ și, prin ipoteza inducției, $V[C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$. Prin urmare, $V[C_1, C_2, \ldots C_m] \leqslant |B_1'| V[B_2, \ldots, B_m] = V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$. Baza inducției

există, deoarece pentru paralelipipedele cu o singură dimensiune teorema este evidentă.

921. Din formula pentru calculul pătratului volumului, rezultă că $V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] = V[A_1, \ldots, A_m) \times V[B_1, \ldots, B_k]$, dacă fiecare vector A_i este ortogonal cu fiecare vector B_j. În cazul general, înlocuim vectorii $B_1, \ldots, B_k$ prin proiecțiile lor $C_1, \ldots, C_k$ pe complementul ortogonal al lui $(A_1, \ldots, A_m)$. În virtutea rezultatului problemei precedente, avem $V[C_1, \ldots, C_k] \leqslant V[B_1, \ldots, B_k]$, de unde

$$V[A_1, \ldots, A_m; B_1, \ldots, B_k] = V[A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_k] =$$
$$= V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[C_1, \ldots, C_k] \leqslant V[A_1, \ldots, A_m] V[B_1, \ldots B_k]$$

Rezultatul acestei probleme coincide cu acela al problemei 518.

922. Rezultă direct din inegalitatea $V[A_1, \ldots, A_m) \leqslant \leqslant |A_1| \cdot V[A_2, \ldots, A_m]$, care la rîndul ei rezultă direct din definiția volumului.

Prin rezultatul ei, această problemă coincide cu problema 519.

923. Transformarea prin similitudine a unui corp din spațiul n dimensional atrage după sine o variație a volumului, proporțională cu puterea n a coeficientului de similitudine. Pentru paralelipiped aceasta rezultă direct din formula volumului, iar pentru orice alt corp volumul este limita unei sume de volume de paralelipipede.

Prin urmare, volumul $V_n(R)$ al unei sfere n—dimensionale de rază R este egal cu $V_n(1) \cdot R^n$.

Pentru calculul lui $V_n(1)$ împărțim sfera printr-un sistem de „plane" $n-1$ dimensionale paralele și folosim principiul lui Cavalieri.

Fie x distanța „planului" secant la centru. Secțiunea este o sferă $n-1$ dimensională, de rază $\sqrt{1-x^2}$.

Prin urmare

$$V_n(1) = 2\int_0^1 V_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) dx = 2V_{n-1}(1)\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx =$$
$$= V_{n-1}(1)\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = V_{n-1}(1)\, B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$
$$= V_{n-1}(1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

De aici rezultă $V_n(1) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

924. Baza este formată de polinoamele $1, x, \ldots, x^n$. Pătratul volumului paralelipipedului corespunzător este egal cu:

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}, \ldots, & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, \ldots, & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1}, & \frac{1}{n+2}, \ldots, & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix} = \frac{[1!\,2!\ldots n!]^3}{(n+1)!\,(n+2)!\ldots(2n+1)!}.$$

925. a) $\lambda_1=1$; $X_1=c(1,-1)$; $\lambda_2=3$; $X_2=c(1,1)$;
b) $\lambda_1=7$; $X_1=c(1,1)$; $\lambda_2=-2$; $X_2=c(4,-5)$;
c) $\lambda_1=ai$; $X_1=c(1,i)$; $\lambda_2=-ai$; $X_2=c(1,-i)$;
d) $\lambda_1=2$; $X_1=c_1(1,1,0,0)+c_2(1,0,1,0)+c_3(1,0,0,1)$; $\lambda_2=-2$; $X_2=c(1,-1,-1,-1)$;
e) $\lambda=2$; $X=c_1(-2,1,0)+c_2(1,0,1)$;
f) $\lambda=-1$; $X=c(1,1,1,-1)$;
g) $\lambda_1=1$; $X_1=c_1(1,0,1)+c_2(0,1,0)$; $\lambda_2=-1$; $X_2=c(1,0,-1)$;
h) $\lambda_1=0$; $X_1=c(3,-1,2)$; $\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{-14}$; $X_{2,3}=c(3\pm2\sqrt{-14},\ 13,\ 2\mp3\sqrt{-14})$;
i) $\lambda_1=1$; $X_1=c(3,-6,20)$; $\lambda_2=-2$; $X_2=c(0,0,1)$;
k) $\lambda_1=1$; $X_1=c(1,1,1)$; $\lambda_2=\varepsilon$; $X_2=c(3+2\varepsilon,\ 2+3\varepsilon,\ 3+3\varepsilon)$; $\lambda_3=\varepsilon^2$; $X_3=c(3+2\varepsilon^2,\ 2+3\varepsilon^2,\ 3+3\varepsilon^2)$,

unde $\varepsilon = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

926. Valorile caracteristice ale lui A^{-1} sînt inversele valorilor caracteristice ale lui A. In adevăr, din $|A^{-1}-\lambda E|=0$ rezultă $|E-\lambda A|=0$, $|A-\dfrac{1}{\lambda}E|=0$.

927. Valorile caracteristice ale matricei A^2 sînt egale cu pătratele valorilor caracteristice ale lui A. In adevăr, fie $|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)$. Atunci $|A+\lambda E|=(\lambda_1+\lambda)(\lambda_2+\lambda)\ldots(\lambda_n+\lambda)$. Înmulţind între ele aceste egalităţi şi înlocuind λ^2 cu λ, obţinem

$$|A^2-\lambda E|=(\lambda_1^2-\lambda)(\lambda_2^2-\lambda)\ldots(\lambda_n^2-\lambda).$$

928. Valorile caracteristice ale lui A^m sînt egale cu valorile caracteristice ale lui A, ridicate la puterea m.

Pentru a ne convinge de aceasta, cel mai simplu este să înlocuim în egalitatea

$$|A - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

pe λ cu $\lambda\varepsilon$, $\lambda\varepsilon^2$, ..., $\lambda\varepsilon^{n-1}$, unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, să înmulțim egalitățile și apoi să înlocuim λ^n cu λ.

929. $f(A) = b_0(A - \xi_1 E) \dots (A - \xi_m E)$, prin urmare $|f(A)| = b_0^n \cdot |A - \xi_1 E| \dots |A - \xi_m E| = b_0^n F(\xi_1) \dots F(\xi_m)$.

930. Fie $F(\lambda) = |A - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$ și $f(x) = b_0(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m)$.

Atunci,

$$|f(A)| = b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (\lambda_i - \xi_k) = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \dots f(\lambda_n).$$

931. Să punem $\varphi(x) = f(x) - \lambda$ și să aplicăm rezultatul problemei precedente. obținem

$$|f(A) - \lambda E| = (f(\lambda_1) - \lambda)(f(\lambda_2) - \lambda) \dots (f(\lambda_n) - \lambda),$$

de unde rezultă că valorile caracteristice ale matricei $f(A)$ sînt $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, ..., $f(\lambda_n)$.

932. Fie X vectorul propriu al matricei A, care corespunde valorii caracteristice λ. Atunci,

$$\begin{aligned} EX &= X, \\ AX &= \lambda X, \\ A^2X &= \lambda^2 X, \\ &\dots\dots\dots \\ A^mX &= \lambda^m X. \end{aligned}$$

Înmulțind aceste egalități vectoriale cu coeficienți arbitrari și adunîndu-le membru cu membru, obținem pentru orice polinom f

$$f(A)X = f(\lambda)X,$$

adică X este vectorul propriu al lui $f(A)$, care corespunde valorii caracteristice $f(\lambda)$.

933. Valorile caracteristice ale lui A^2 sînt n și respectiv $-n$, cu ordinul de multiplicitate $\frac{n+1}{2}$ și $\frac{n-1}{2}$. Prin urmare, valorile caracteristice ale lui A sînt $+\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $+i\sqrt{n}$

și $-i\sqrt{n}$. Să notăm ordinele lor de multiplicitate cu a, b, c, d. Atunci, $a+b=\frac{n+1}{2}$, $c+d=\frac{n-1}{2}$. Suma valorilor caracteristice ale matricei este egală cu suma elementelor de pe diagonale principală. Prin urmare,

$$[a-b+(c-d)i]\sqrt{n}=1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}.$$

Modulul membrului al doilea al acestei egalități este egal cu $\sqrt{n}$ (v. problema 126). Prin urmare,

$$(a-b)^2+(c-d)^2=1.$$

Deoarece numerele $c-d$ și $c+d$ sînt de aceeași paritate, rezultă că

$a-b=0$, $c-d=\pm 1$, dacă $\frac{n-1}{2}$ este impar,

și

$a-b=\pm 1$, $c-d=0$, dacă $\frac{n-1}{2}$ este par. Prin urmare, pentru $n=1+4k$:

$c=d=k$; $a=k+1$, $b=k$ sau $a=k$, $b=k+1$; pentru $n=3+4k$:

$a=b=k+1$, $c=k+1$, $d=k$ sau $c=k$, $d=k+1$.

Valorile caracteristice sînt astfel determinate, abstracție făcînd de semn. Pentru a determina și semnul lor, ne vom folosi de faptul că produsul valorilor caracteristice este egal cu determinantul matricei. Folosind rezultatul problemei 229, se arată ușor că pentru $n=1+4k$

$$a=k+1,\quad b=k,$$

iar pentru $n=3+4k$

$$c=k+1,\quad d=k.$$

Astfel, valorile caracteristice au fost complet determinate.

934. $1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+\sqrt{n}$ pentru $n=4k+1$,
$1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+i\sqrt{n}$ pentru $n=4k+3$.

935. a) Să punem $\frac{x}{y} = \alpha^n$. Atunci, $\lambda_k = y\,\frac{\alpha\,\varepsilon_k - \alpha^n}{1 - \alpha\,\varepsilon_k}$, unde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

b) $\lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + a_3\varepsilon_k^2 + \ldots + a_n\varepsilon_k^{n-1}$.

c) $\lambda_k = 2i\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

936.

$$A \times B - \lambda E_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11}B - \lambda E_m, & a_{12}B, & \ldots, a_{1n}B \\ a_{21}B, & a_{22}B - \lambda E_m, & \ldots, a_{2n}B \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}B, & a_{n2}B, & \ldots, a_{nn}B - \lambda E_m \end{pmatrix},$$

de unde rezultă, ţinînd seama de rezultatul problemei 537, că

$$|A \times B - \lambda E_{mn}| = |(\varphi(B)|,$$

unde

$$\varphi(x) = |Ax - \lambda E_n| = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i x - \lambda).$$

Pe baza rezultatului problemei 930

$$|\varphi(B)| = \prod_{k=1}^{m}\varphi(\beta_k) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(a_i\beta_k - \lambda).$$

Prin urmare, valorile carcateristice ale lui $A \times B$ sînt numerele $\alpha_i\beta_k$, unde α_i sînt valorile caracteristice ale lui A, iar β_k sînt valorile caracteristice ale lui B.

937. Dacă A este o matrice nesingulară, atunci

$$|BA - \lambda E| = |A^{-1}(AB - \lambda E)A| = |A^{-1}| \cdot |AB - \lambda E| \cdot |A| = \\ = |AB - \lambda E|.$$

Putem elimina ipoteza că A este nesingulară prin trecere la limită sau prin aplicarea teoremei referitoare la identitatea polinoamelor de mai multe variabile.

De asemenea, aplicînd teorema de înmulţire a matricelor dretunghiulare, putem calcula direct coeficienţii polinoamelor $|AB - \lambda E|$ şi $|BA - \lambda E|$, stabilind egalitatea lor.

938. Să completăm matricele A şi B pînă la matricele pătrate A' şi B' de ordinul n, adăugînd $n - m$ linii la A şi $n - m$

coloane, la B, formate din elemente nule. Atunci, $BA = B'A'$, iar $A'B'$ se obţine din AB prin încadrarea ei cu elemente nule. Aplicarea rezultatului problemei precedente ne dă ceea ce era de demonstrat.

Soluţiile problemelor 939, 940, 941 nu sînt unice. Răspunsurile pe care le dăm mai jos corespund unor transformări care se deosebesc cel mai puţin de o transformare „triunghiulară"

939.

a) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$;
$x_1' = x_1 + x_2$;
$x_2' = x_2 + 2x_3$;
$x_3' = x_3$;

b) $-x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$;
$x_1' = x_1$;
$x_2' = x_1 - 2x_2$;
$x_3' = x_1 + x_3$;

c) $x_1'^2 - x_2'^2 - x_2'^2$;
$x_1' = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3$;
$x_2' = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$;
$x_3' = x_3$;

d) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$;
$x_1' = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$;
$x_2' = x_2 + x_3 + x_4$;
$x_3' = x_2 - x_3 + 2x_4$;
$x_4' = x_4$.

e) $x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2$;
$x_1' = x_1 + \frac{1}{2}x_2$;
$x_2' = \frac{1}{2}x_2$;
$x_3' = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$;
$x_4' = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$.

940. $x_1'^2 + \frac{3}{4}x_2'^2 + \frac{4}{6}x_3'^2 + \ldots + \frac{n+1}{2n}x_n'^2$.

Variabilele $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ se exprimă liniar prin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu ajutorul matricei:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & & \ldots & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & & \ldots & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & \ldots & 1/4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

941.

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+x_4+\ldots+x_n\right)^2-\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2-$$

$$-\left(x_3+\frac{1}{2}x_4+\ldots+\frac{1}{2}x_n\right)^2-$$

$$-\frac{3}{4}\left(x_4+\frac{1}{3}x_5+\ldots+\frac{1}{3}x_n\right)^2-\ldots-\frac{n-1}{2(n-2)}x_n^2.$$

942. Matricea formei pătratice, pozitiv este egală cu $\bar{A}A$, unde A este matricea reală nesingulară care realizează trecerea dela suma de pătrate la forma dată.

Faptul că minorii sînt pozitivi reiese din rezultatul problemei 510.

943. Fie

$$\begin{aligned} f = {} & a_{11}x_1^2+\ldots+a_{1n}x_1x_n \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +a_{n1}x_nx_1+\ldots+a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

o formă pătratică. Să punem

$$\begin{aligned} f^{(k)} = {} & a_{11}x_1^2+\ldots+a_{1k}x_1x_k \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +a_{k1}x_kx_1+\ldots+a_{kk}x_k^2, \end{aligned}$$

și

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix},$$ r fiind rangul formei .

Fie $f=\alpha_1x_1'^2+\alpha_2x_2'^2+\ldots+\alpha_nx_n'^2$ unde

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n, \\ x_2' &= \quad x_2+\ldots+b_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= \quad x_n. \end{aligned}$$

Datorită faptului că determinantul transformării triunghiulare este egal cu 1, $D_f = \Delta_n = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$. Punînd $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$, obţinem

$$f^{(k)} = \alpha_1 x_1^{(k)^2} + \alpha_2 x_2^{(k)^2} + \ldots + \alpha_k x_k^{(k)^2},$$

unde

$$x_1^{(k)} = x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1k}x_k;$$
$$x_2^{(k)} = x_2 + \ldots + b_{2k}x_k;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_k^{(k)} = x_k.$$

De aici rezultă că $\Delta_k = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k$ şi că o condiţie necesară pentru ca să fie posibilă o transformare triunghiulară la forma diagonală este

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \ldots, \Delta_r \neq 0.$$

Se verifică uşor că această condiţie este şi suficientă.

Mai departe, $\alpha_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ pentru $k \leqslant r$, iar $\alpha_k = 0$ pentru $k > r$.

Discriminantul formei

$$f_k(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f - \alpha_1 x_1'^2 - \ldots - \alpha_k x_k'^2 = \alpha_{k+1} x_{k+1}'^2 + \ldots + \alpha_n x_n'^2$$

este egal cu $\alpha_{k+1}\alpha_{k+2} \ldots \alpha_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_k}$.

944. Necesitatea condiţiilor lui Sylvester a fost demonstrată în problema 942. Suficienţa reiese din rezultatul problemei 943.

945. Fie l o formă liniară de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să transformăm forma f cu ajutorul unei transformări cu determinantul egal cu 1, luînd forma l drept ultima dintre noile variabile. Apoi, efectuăm transformarea triunghiulară a formei f, aducînd-o la forma canonică. Forma f va deveni

$$f = \alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \ldots + \alpha_n x_n'^2,$$

iar $x_n' = l$.

Discriminantul formei f este egal cu $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Discriminantul formei $f + l^2$ este egal cu $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}(\alpha_n + 1)$. El este mai mare decît discriminantul formei f, deoarece toţi coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ sînt pozitivi.

946. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{21}x_1x_2 + \ldots + 2a_{n1}x_1x_n + \varphi =$$
$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{n1}}{a_{11}}x_n\right)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n),$$
unde $f_1 = \varphi - a_{11}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{n1}}{a_{11}}x_n\right)^2$.

Forma f_1 este pozitivă şi discriminantul ei este egal cu $\frac{D_f}{a_{11}}$, unde D_f este discriminantul lui f. Pe baza rezultatului problemei 945 $D_{f_1} \geqslant \frac{D_f}{a_{11}}$, ceea ce era de demonstrat.

947. Se demonstrează la fel ca şi legea inerţiei.

948. Să alcătuim formele liniare

$$l_k = u_1 + u_2x_k + \ldots + u_nx_k^{n-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuaţiei date.

La rădăcini egale vor corespunde forme egale, la rădăcini diferite, vor corespunde forme liniare independente, la rădăcini reale — forme reale, iar la rădăcini complex conjugate, forme complex conjugate.

Părţile reală şi imaginară ale formei complexe $l_k = \lambda_k + \mu_k i$ vor fi liniar independente între ele, şi cu toate formele care corespund rădăcinilor, diferite de x_k şi x'_k.

Să formăm forma pătratică

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{k=1}^{n}(u_1 + u_2x_i + \ldots + u_nx_i^{n-1})^2.$$

Rangul acestei forme este egal cu numărul rădăcinilor distincte ale ecuaţiei date. Matricea coeficienţilor ei este

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Suma pătratelor formelor liniare complex conjugate, $l_k = \lambda_k + i\mu_k$ şi $l'_k = \lambda_k - i\mu_k$, este egală cu $2\lambda_k^2 - 2\mu_k^2$. Prin urmare (după legea inerţiei), numărul pătratelor negative în orice

reprezentare canonică a formei f este egal cu numărul perechilor diferite de rădăcini complex conjugate ale ecuaţiei date.

949. Reiese din rezultatele problemelor 948, 944.

950. Operaţia (f, φ) este evident distributivă. De aceea, este suficient să facem demonstrarea pentru pătratele unor forme liniare.

Fie $f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)^2$,
$\varphi = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n)^2$.

Atunci, este uşor de văzut că

$$(f\varphi) = (\alpha_1\beta_1 x_1 + \alpha_2\beta_2 x_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n x_n)^2 \geqslant 0.$$

951. a) $4x_1'^2 + x_2'^2 - 2x_3'^2$;

$$x_1' = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3;$$
$$x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3;$$
$$x_3' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3.$$

b) $2x_1'^2 - x_2'^2 + 5x_3'^2$;

$$x_1' = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3;$$
$$x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3;$$
$$x_3' = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3.$$

c) $7x_1'^2 + 4x_2'^2 + x_3'^2$;

$$x_1' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3;$$
$$x_2' = \frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3;$$
$$x_3' = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3.$$

d) $10x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$;

$$x_1' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3;$$
$$x_2' = \frac{2\sqrt{5}}{5}x_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}x_2;$$
$$x_3' = \frac{2\sqrt{5}}{15}x_1 + \frac{4\sqrt{15}}{15}x_2 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_3.$$

e) $-7x_1'^2+2x_2'^2+2x_3'^2$;
$$x_1=\frac{1}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'-\frac{2}{3}x_3';$$
$$x_2=\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1'-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2';$$
$$x_3=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1'+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2'+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3'.$$

f) $2x_1'^2+5x_2'^2+8x_3'^2$;
$$x_1=\frac{2}{3}x_1'+\frac{1}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3';$$
$$x_2=\frac{1}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'-\frac{2}{3}x_3';$$
$$x_3=\frac{2}{3}x_1'-\frac{2}{3}x_2'-\frac{1}{3}x_3'.$$

g) $7x_1'^2-2x_2'^1+7x_3'^2$;
$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1'\quad-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3';$$
$$x_2=\frac{2}{3}x_1'+\frac{1}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3';$$
$$x_3=\frac{\sqrt{2}}{6}x_1'-\frac{2\sqrt{2}}{3}x_2'+\frac{\sqrt{2}}{6}x_3'.$$

h) $11x_1'^2+5x_2'^2-x_3'^2$;
$$x_1=\frac{2}{3}x_1'-\frac{2}{3}x_2'-\frac{1}{3}x_3';$$
$$x_2=\frac{2}{3}x_1'+x_2'+\frac{2}{3}x_3';$$
$$x_3=\frac{1}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'-\frac{2}{3}x_3'.$$

i) $x_1'^3-x_2'^2+3x_3'^2+5x_4'^2$;
$$x_1=\frac{1}{2}x_1'+\frac{1}{2}x_2'+\frac{1}{2}x_3'+\frac{1}{2}x_4';$$
$$x_2=\frac{1}{2}x_1'+\frac{1}{2}x_2'-\frac{1}{2}x_3'-\frac{1}{2}x_4';$$
$$x_3=\frac{1}{2}x_1'-\frac{1}{2}x_2'+\frac{1}{2}x_3'-\frac{1}{2}x_4';$$
$$x_4=\frac{1}{2}x_1'-\frac{1}{2}x_2'-\frac{1}{2}x_3'+\frac{1}{2}x_4'.$$

j) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2'$;

$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_3' + \frac{\sqrt{2}}{2} x_4'$;

$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1' - \frac{\sqrt{2}}{2} x_2'$;

$x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_3' - \frac{\sqrt{2}}{2} x_4'$.

k) $x_1'^2 + x_2'^2 + 3x_3'^2 - x_4'^2$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} x_4'$;

$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} x_3'$;

$x_3 = \frac{1}{2} x_1' + \frac{1}{2} x_2' - \frac{1}{2} x_3' - \frac{1}{2} x_4'$;

$x_4 = -\frac{1}{2} x_1' + \frac{1}{2} x_2' + \frac{1}{2} x_3' - \frac{1}{2} x_4'$;

l) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - 3x_4'^2$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1' + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2'$;

$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_3' + \frac{\sqrt{2}}{2} x_4'$;

$x_3 = \frac{1}{2} x_1' - \frac{1}{2} x_2' + \frac{1}{2} x_3' - \frac{1}{2} x_4'$;

$x_4 = \frac{1}{2} x_1' - \frac{1}{2} x_2' - \frac{1}{2} x_3' + \frac{1}{2} x_4'$.

m) $x_1'^2 - x_2'^2 + 7x_3'^2 - 3x_4'^2$; $x_1 = \frac{1}{2} x_1' + \frac{1}{2} x_2' + \frac{1}{2} x_3' + \frac{1}{2} x_4'$;

$x_2 = \frac{1}{2} x_1' + \frac{1}{2} x_2' - \frac{1}{2} x_3' - \frac{1}{2} x_4'$;

$x_3 = \frac{1}{2} x_1' - \frac{1}{2} x_2' + \frac{1}{2} x_3' - \frac{1}{2} x_4'$;

$x_4 = \frac{1}{2} x_1' - \frac{1}{2} x_2' - \frac{1}{2} x_3' + \frac{1}{2} x_4'$.

n) $5x_1'^2-5x_2'^2+3x_3'^2-3x_4'^2$; $x_1=\frac{1}{2}x_1'+\frac{1}{2}x_2'+\frac{1}{2}x_3'+\frac{1}{2}x_4'$;

$x_2=\frac{1}{2}x_1'+\frac{1}{2}x_2'-\frac{1}{2}x_3'-\frac{1}{2}x_4'$;

$x_3=\frac{1}{2}x_1'-\frac{1}{2}x_2'+\frac{1}{2}x_3'-\frac{1}{2}x_4'$;

$x_4=\frac{1}{2}x_1'-\frac{1}{2}x_2'-\frac{1}{2}x_3'+\frac{1}{2}x_4'$.

952. a) $\frac{n+1}{2}x_1'^2+\frac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2)$;

b) $\frac{n-1}{2}x_1'^2-\frac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2)$,

unde

$$x_1'=\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1+x_2+\ldots+x_n);$$

$$x_i'=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\ldots+\alpha_{in}x_n,\quad i=2,\ldots,n,$$

în care $(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in})$ poate fi orice sistem fundamental ortonormat de soluții ale ecuației

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0.$$

953. $x_1'^2\cos\frac{\pi}{n+1}+x_2'^2\cos\frac{2\pi}{n+1}+\ldots+x_n'^2\cos\frac{n\pi}{n+1}$.

954. Dacă toate valorile caracteristice ale matricei A sînt cuprinse în intervalul închis $[a, b]$, atunci toate valorile caracteristice ale matricei $A-\lambda E$ sînt negative pentru $\lambda>b$ și pozitive pentru $\lambda<a$. Prin urmare, forma pătratică cu matricea $A-\lambda E$ este negativ definită pentru $\lambda>b$ și pozitiv definită pentru $\lambda<a$. Reciproc, dacă forma pătratică $(A-\lambda E)X\cdot X$ este negativ definită pentru $\lambda>b$ și pozitiv definită pentru $\lambda<a$, atunci toate valorile caracteristice ale matricei $A-\lambda E$ sînt pozitive pentru $\lambda<a$ și negative pentru $\lambda>b$. Prin urmare, toate valorile caracteristice ale matricei A sînt cuprinse în intervalul închis $[a, b]$.

955. Pentru orice vector X sînt valabile inegalitățile

$$aX\cdot X\leqslant AX\cdot X\leqslant cX\cdot X,\quad bX\cdot X\leqslant BX\cdot X\leqslant dX\cdot X,$$

de unde $(a+b)X\cdot X\leqslant(A+B)X\cdot X\leqslant(c+d)X\cdot X$. Prin

urmare, toate valorile caracteristice ale matricei $A+B$ sînt cuprinse în intervalul închis $[a+c, b+d]$.

956. a) Reiese din rezultatul problemei 937.

b) $|AX|^2 = AX \cdot AX = X \cdot \overline{A}AX \leqslant |X|^2 \cdot \|A\|^2$.

Egalitatea are loc pentru vectorul propriu al matricei $\overline{A}A$, care aparține valorii caracteristice $\|A\|^2$.

c) $|(A+B)X| \leqslant |AX| + |BX| \leqslant (\|A\| + \|B\|)\,|X|$ pentru orice vector X. Pentru un anumit vector X_0 avem, însă,

$$|(A+B)X_0| = (\|A+B\|) \cdot |X_0|.$$

Prin urmare,

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

d) $|ABX| \leqslant \|A\| \cdot |BX| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot |X|$.

Aplicînd această inegalitate vectorului X_0, pentru care $\|AB\| \times |X_0| = |ABX_0|$, obținem $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

e) Fie $\lambda = p + qi$ o valoare caracteristică a matricei A, iar $X = Y + iZ$ vectorul propriu corespunzător. Atunci

$$AY = pY - qZ, \quad AZ = qY + pZ,$$

de unde

$$|pY - qZ|^2 \leqslant \|A\|^2 |Y|^2, \quad |qY + pZ|^2 \leqslant \|A\|^2 |Z|^2.$$

Adunînd aceste inegalități, obținem

$$|\lambda|^2 (|Y|^2 + |Z|^2) = (p^2 + q^2)(|Y|^2 + |Z|^2) \leqslant \|A\|^2 (|Y|^2) + |Z|^2)$$

și, prin urmare, $|\lambda| \leqslant \|A\|$.

957. Fie A o matrice reală nesingulară; atunci $\overline{A}AX \cdot X = |AX|^2$ este o formă pătratică pozitivă definită, care poate fi adusă la forma canonică printr-o transformare de matrice triunghiulară B, ale cărei elemente de pe diagonală, sînt pozitive. Prin urmare $\overline{A}A = \overline{B}B$, de unde rezultă că $\overline{AB^{-1}} \cdot AB^{-1} = E$, adică $AB^{-1} = P$, este o matrice ortogonală. De aici $A = PB$. Unicitatea rezultă din unicitatea trahsformării triunghiulare a unei forme pătratice, în forma canonică.

958. $\overline{A}A$ este o matrice simetrică cu valori caracteristice pozitive $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Prin urmare

$$\overline{A}A = P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P.$$

Să construim matricea

$$B = P^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}P,$$

unde μ_i este valoarea aritmetică a rădăcinii pătrate din λ_i. Evident că B este din nou o matrice pozitivă cu valori caracteristice pozitive şi $B^2 = \overline{A}A$. De aici rezultă că $AB^{-1} = Q$ este o matrice ortogonală, $A = QB$.

959. După ce am adus originea în centrul suprafeţei, suprafaţa trebuie să conţină, odată cu punctul X, şi punctul $-X$ şi, prin urmare, ecuaţia nu trebuie să conţină termeni de gradul întîi. După translaţia axelor $X = X_0 + X'$, unde X_0 este vectorul translaţiei, ecuaţia suprafeţei se transformă în

$$AX' \cdot X' + 2(AX_0 + B)X' + AX_0 \cdot X_0 + 2BX_0 + C = 0.$$

De aceea, pentru existenţa centrului este necesar şi suficient ca ecuaţia $AX_0 + B$ să poată fi rezolvată în raport cu vectorul X_0. Pentru aceasta, este necesar şi suficient ca rangul matricei A să fie egal cu rangul matricei (A, B).

960. După ce am adus originea în centru, ecuaţia suprafeţei ia forma $AX \cdot X + \gamma = 0$.

Dacă r este rangul matricei A, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt valori caracteristice, diferite de zero, atunci după o transformare ortogonală convenabilă a coordonatelor, ecuaţia va lua forma canonică $\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + \gamma = 0$.

961. Suprafaţa nu are centru, dacă rangul lui (A, B) este mai mare decît rangul lui A, ceea ce este posibil numai dacă $r = \text{Rang } A < n$. Să notăm cu R spaţiul total, cu P — spaţiul AR, iar cu Q, complementul ortogonal al lui P. Atunci, pentru orice $Y \in Q$ vom avea $AY = 0$, deoarece $|AY|^2 = AY \cdot \overline{AY} =$

$=Y \cdot AAY = 0$, întrucît $AAY \in P$. Fie $B=B_1+B_2$, unde $B_1 \in P$, $B_2 \in Q$. Atunci $B_2 \neq 0$; altfel B ar fi aparținut lui P și rangul lui (A, B) ar fi fost egal cu r. Fie $B_1=AX_0$. După translația $X=X_0+X'$, ecuația suprafeței se transformă în

$$AX' \cdot X'+2B_2X'+c'=0.$$

Să mai facem încă o translație $X'=aB_2+X''$. Atunci $AX' \cdot X'=a^2AB_2 \cdot B_2+2aAB_2 \cdot X''+AX'' \cdot X''=AX'' \cdot X''$, deoarece $AB_2=0$ și, prin urmare, ecuația se aduce la forma

$$AX'' \cdot X'' + 2B_2X'' + 2a \mid B_2 \mid^2 + c' = 0.$$

Să luăm $a=-\frac{c'}{2 \mid B_2 \mid^2}$. Ecuația se va transforma în

$$AX'' \cdot X'' + 2B_2X'' = 0.$$

Să facem acuni o transformare ortogonală a coordonatelor, luînd ca bază a spațiului vectorii proprii unitari, orotogonali doi cîte doi, ai matricei A, printre care includem și un vector unitar coliniar cu vectorul B_2 și dirijat în sens contrar. Acest lucru poate fi făcut, deoarece B_2 este un vector propriu al lui A. In această bază, ecuația are forma

$$\lambda_1x_1^2 + \ldots + \lambda_rx_r^2 - 2\beta_2x_{r+1} = 0,$$

unde $\beta_2 = \mid B_2 \mid$. Ne mai rămîne să împărțim cu β_2.

962. Prin transformarea liniară de matricea A, spațiul se reprezintă pe subspațiul generat de vectorii $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ale căror coordonate formează coloanele matricei A. De aici obținem direct rezultatul cerut.

963. Fie $e_1, e_2, \ldots, e_q$ o bază a lui Q. Atunci, Q' este spațiul construit pe $e_1', e_2', \ldots, e_q'$, care sînt imaginile lui e_1, $e_2, \ldots, e_q$ prin transformarea liniară efectuată. Prin urmare, $q' \leqslant q$. Afară de aceasta, este evident că $q' \leqslant r$, deoarece Q' este cuprins în R'. Mai departe, fie P' spațiul complementar lui Q, de dimensiune $p=n-q$, iar p' imaginea sa prin transformarea liniară. Numărul dimensiunilor lui P', egal cu p', nu depășește pe $n-q$. Avem însă, $P'+Q'=R'$ și, prin urmare, $p'+q' \geqslant r$.

De aici rezultă $q' \geqslant r-p' \geqslant r+q-n$.

964. Să presupunem că rangul lui A este egal cu r_1, iar rangul lui B este egal cu r_2 și $BR=Q$. Numărul dimensiunilor

lui Q este egal cu r_2. Atunci ρ, egal cu rangul lui AB, este numărul dimensiunilor lui $ABR = AQ$. Pe baza rezultatului problemei precedente, $r_1+r_2-n \leqslant \rho \leqslant \min(r_1 r_2)$.

965. Repetarea de două ori a operației de proiecție este echivalentă cu efectuarea ei simplă. În adevăr, prin prima proiecție toți vectorii spațiului vor trece în vectorii subspațiului P, care la a doua proiecție vor rămîne neschimbați. Prin urmare, $A^2=A$. Reciproc, fie $A^2=A$. Să notăm cu P mulțimea tuturor vectorilor $Z=AX$, iar cu Q, mulțimea vectorilor Y, pentru care $AY=0$. Este evident că P și Q sînt spații liniare. Intersecția lor este vectorul nul, deoarece dacă $AX=Y$, atunci $AX=A^2X=AY=0$. Mai departe, pentru orice vector X, avem $X=AX+(E-A)X$. Evident că $(E-A)X \in Q$, deoarece $A(E-A)X=(A-A^2)X=0$. De aceea, $P+Q$ este spațiul total, adică P și Q sînt subspații complementare. Operația AX înseamnă trecerea dela vectorul X la componenta sa din P adică este operația de proiecția a lui P paralel cu Q.

966. Fie $P \perp Q$. Să alegem o bază ortonormată a spațiului total reunind bazele ortonormate ale lui P și Q. In această bază, matricea transformării de proiecție va avea forma diagonală

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

În orice altă bază ortonormată, matricea proiecției va fi egală cu $A=B^{-1}A'B$, unde B este o matrice ortogonală. Evident că A este simetrică.

Reciproc, dacă A este o matrice simetrică și $A^2=A$, atunci spațiile $P=AR$ și $Q=(E-A)R$ sînt ortogonale, deoarece $AX(E-A)Y=X \cdot \bar{A}(E-A)Y=X(A-A^2)Y=0$.

967. Fie A o matrice antisimetrică. Este ușor de văzut că $AX \cdot X=0$ pentru orice vector real X, deoarece

$$AX \cdot X = X \cdot \bar{A}X = X \cdot (-AX) = -AX \cdot X.$$

Fie $\lambda=\alpha+\beta i$ o valoare caracteristică a matricei A, iar $U=X+Yi$ — vectorul propriu corespunzător. Atunci

$$AX=\alpha X-\beta Y,\quad AY=\beta X+\alpha Y.$$

De aici rezultă $\alpha(|X|^2+|Y|^2)=AX\cdot X+AY\cdot Y=0$, şi $\alpha=0$. Mai departe, $\beta X\cdot Y+\alpha|Y|^2=AY\cdot Y=0$, de unde $X\cdot Y=0$, pentru $\beta\neq 0$; în sfîrşit din egalitatea $\beta(|X|^2-|Y|^2)=AY\cdot X+AX\cdot Y=AY\cdot X-X\cdot AY=0$ rezultă $|X|=|Y|$.

968. Fie

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

o matrice antisimetrică. Dacă toate valorile ei caracteristice sînt nule, atunci $A=0$. În adevăr, suma produselor valorilor caracteristice luate cîte două este egală cu suma tuturor minorilor principali de ordinul al doilea $\sum_{i<k} a_{ik}^2$, iar anularea acestei sume atrage după sine $a_{ik}=0$ pentru orice i, k, adică $A=0$.

Să presupunem că A are o valoare caracteristică diferită de zero.

Să normăm părţile reală şi imaginară ale vectorului propriu care îi aparţine. Deoarece lungimile lor sînt egale, factorul de normare va fi acelaşi, iar vectorii obţinuţi satisfac egalităţile

$$AX=-a_1Y;\quad AY=a_1X.$$

Să formăm o matrice ortogonală, punînd în primele două coloane vectorii X şi Y. Atunci

$$P^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots \\ -a_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Intrucît matricea $P^{-1}AP$ este antisimetrică, toate elementele care nu sînt scrise din primele două linii sînt egale

cu zero, iar matricea formată de elementele din linia 3,4, ... , n și coloana 3,4, ... n, va fi antisimetrică. Aplicînd același raționament, scoatem în evidență încă o „celulă" $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}$. Procesul continuă pînă ce în colțul din stînga de jos rămîne o matrice care are toate valorile caracteristice egale cu zero. Toate elementele unei asemenea matrice sînt, însă, nule. Problema este astfel rezolvată.

969. Fie

$$B=(E-A)(E+A)^{-1}.$$

Atunci

$$\overline{B}=(\overline{E+A})^{-1}(\overline{E-A})=(E-A^{-1}(E+A)=B^{-1}.$$

Mai departe,

$$B+E=(E-A)(E+A)^{-1}+(E+A)(E+A)^{-1}=2(E+A)^{-1},$$

și, prin urmare,

$$|B+E|\neq 0.$$

Reciproc, dacă

$$\overline{B}=B^{-1} \text{ și } |B+E|\neq 0,$$

atunci pentru A putem lua $(E+B)^{-1}(E-B)$. Se vede ușor că A este o matrice antisimetrică.

970. Fie A o matrice ortogonală. Atunci

$$AX\cdot AY=X\cdot \overline{A}AY=X\cdot Y$$

pentru orice vectori reali X și Y.

Fie

$$\lambda=\alpha+\beta i$$

o valoare caracteristică a matricei A și

$$U=X+Yi$$

vectorul propriu corespunzător. Atunci,

$$AX=\alpha X-\beta Y, \quad AY=\alpha Y+\beta X,$$

unde

$$|X|^2=X\cdot X=AX\cdot AX=\alpha^2|X|^2+\beta^2|Y|^2-2\alpha\beta\, X\cdot Y.$$
$$|Y|^2=Y\cdot Y=AY\cdot AY=\alpha^2|Y|^2+\beta^2|X|^2+2\alpha\beta\, X\cdot Y.$$

Adunînd aceste egalități, obținem : $\alpha^2+\beta^2=1$.

971. Pentru $\beta \neq 0$, ultimele egalităţi din problema precedentă ne dau

$$\beta(|X|^2 - |Y|^2) + 2\alpha X \cdot Y = 0.$$

Pe de altă parte,

$$X \cdot Y = AX \cdot AY = (\alpha^2 - \beta^2) X \cdot Y + \alpha\beta(|X|^2 - |Y|^2),$$

de unde

$$\alpha(|X|^2 - |Y|^2) - 2\beta X \cdot Y = 0$$

şi prin urmare,

$$X \cdot Y = |X|^2 - |Y|^2 = 0.$$

972. 1. Fie $\lambda = \alpha + \beta i = \cos\varphi + i \sin\varphi$ o valoare caracteristică complexă a matricei. Să formăm matricea ortogonală A, ale cărei prime două coloane sînt formate cu părţile reală şi imaginară ale vectorului care aparţine lui λ. Atunci

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \dots \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Datorită ortogonalităţii matricei $Q^{-1}AQ$, suma pătratelor elementelor din fiecare linie este egală cu 1 şi, prin urmare, toate elementele nescrise din primele două linii sînt egale cu zero.

2. Fie $\lambda = \pm 1$ o valoare caracteristică a matricei A, iar X vectorul propriu normat, care aparţine acestei valori caracteristice.

Să formăm o matrice ortogonală a cărei primă coloană este formată din vectorul X. Atunci,

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \pm 1 & \dots \\ 0 & \dots \\ & \dots \\ & \vdots \\ & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Toate elementele nescrise din prima linie sînt egale cu zero, deoarece suma pătratelor elementelor de pe o linie a matricei ortogonale $Q^{-1}AQ$ este egală cu 1.

Aplicînd raționamentele de mai sus la matricele ortogonale care rămîn în colțul din stînga de jos, obținem rezultatul cerut.

973. a) $\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -2, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & i, & 0 \\ 0, & 0, & -i \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -3, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$; m) $\begin{pmatrix} 3, & 0, & 0 \\ 0, & -2, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$; o) $\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$.

974. a) $\begin{pmatrix} 1, & 1 & & \\ 0, & 1 & & \\ & & 1, & 1 \\ & & 0, & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1, & 1 & & \\ 0, & 1, & 1 & \\ & 0, & 1 & 1 \\ & & 0, & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$, unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$.

975. „Celula" $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix}$ nu poate fi periodică.

Observație. Rezultatul nu mai este valabil într-un corp de caracteristică diferită de zero. De exemplu, într-un corp de caracteristică 2 avem: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = E$.

976. Fie A o matrice dată, iar $B = C^{-1}AC$ reprezentarea ei în forma canonică Jordan. Matricea canonică B are forma triunghiulară și elementele ei de pe diagonală sînt egale cu valorile caracteristice ale matricei A, iar fiecare dintre ele se repetă de un număr egal cu multiplicitatea sa în ecuația caracteristică. Mai departe, $B'_m = (C'_m)^{-1} A'_m C'_m$ (problema 531). Prin urmare, polinoamele caracteristice ale matricelor A'_m și B'_m coincid. Printr-o numerotare convenabilă a combinațiilor, matricea B'_m are forma triunghiulară, și prin urmare, valorile ei caracteristice sînt egale cu elementele ei de pe diagonală. Acestea sînt, însă, egale cu diferitele produse ale valorilor caracteristice ale matricei A, luate cîte m.

977. Matricele $A - \lambda E$ și $\bar{A} - \lambda E$ au divizori elementari care coincid. Prin urmare, A și $\bar{A}$ se aduc la aceeași formă canonică, și deci, ele se transformă una în alta.

978. Dacă $A = CD$, unde C și D sînt matrice simetrice, iar matricea C este nesingulară, atunci $A = DC$ și, prin urmare, $\bar{A} = C^{-1}AC$. Așadar, matricea C trebuie să fie căutată printre matricele care transformă A în $\bar{A}$.

Fie $A = SBS^{-1}$, unde B este matricea canonică

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}, \text{ unde } B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Atunci $\overline{A}=S^{-1}BS$.

Să notăm cu H_i matricea

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ \cdot & & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 1 & & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Se vede ușor că $\overline{B}_i = H_i^{-1}B_iH_i$ și, prin urmare, $B=H^{-1}BH$, unde

$$H=\begin{pmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & H_k \end{pmatrix}.$$

Astfel, $\overline{A}=\overline{S}^{-1}H^{-1}BHS=\overline{S}^{-1}H^{-1}S^{-1}ASH\overline{S}=C^{-1}AC$, unde $C=SH\overline{S}$. Evident, matricea C este simetrică. Punem $D=C^{-1}A$.

Atunci, $\overline{D}=\overline{A}C^{-1}=C^{-1}ACC^{-1}=D$. Așadar, matricea D este, de asemenea simetrică și $A=CD$.

979. Fie $|A-\lambda E|=-(1)^n(\lambda^n-c_1\lambda^{n-1}-c_2\lambda^{n-2}-\ldots-c_n)$.

Evident că $p_1=SpA=c_1$. Să admitem că am demonstrat că $p_1=c_1$, $p_2=c_2$, $\ldots$, $p_{k-1}=c_{k-1}$ și să demonstrăm în această ipoteză că $p_k=c_k$. Conform construcției noastre, $A_k=A^k-p_1A^{k-1}-p_2A^{k-2}-\ldots-p_{k-1}A=A^k-c_1A^{k-1}-c_2A^{k-2}-\ldots-c_{k-1}A$. Prin urmare,

$$SpA_k=kp_k=SpA^k-c_1SpA^{k-1}-\ldots-c_{k-1}SpA=$$
$$=S_k-c_1S_{k-1}-\ldots-c_{k-1}S_1,$$

unde $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sînt sumele de puteri ale valorilor caracteristice ale matricei A. După formulele lui Newton, avem însă: $S_k-c_1S_{k-1}-\ldots-c_{k-1}S_1=kc_k$. Prin urmare, $p_k=c_k$.

Mai departe, $B_n=A^n-c_1A^{n-1}-\ldots-c_{n-1}A-c_nE=0$, în virtutea relației lui Hamilton-Cayley. În sfîrșit, $AB_{n-1}=A_n=c_nE$, de unde $B_{n-1}=c_nA^{-1}$.

980. Fie

$$C=\begin{pmatrix} 0, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{21}, & 0, & \ldots, & c_{2n} \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}.$$

Să examinăm matricea diagonală

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

ale cărei elemente de pe diagonală sînt arbitrare, dar distincte. Să luăm

$$Y = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}, b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$XY - YX = \begin{pmatrix} 0, & b_{12}(\alpha_2-\alpha_1), & \ldots, & b_{1n}(\alpha_n-\alpha_1) \\ b_{21}(\alpha_1-\alpha_2), & 0, & \ldots, & b_{2n}(\alpha_n-\alpha_2) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ b_{n1}(\alpha_1-\alpha_n), & b_{n2}(\alpha_2-\alpha_n), & \ldots, & 0 \end{pmatrix}$$

şi, prin urmare, este suficient să luăm $b_{ik} = \frac{c_{ik}}{\alpha_k - \alpha_i}$ pentru $i \neq k$. Mai departe, aplicînd inducţia completă, stabilim că orice matrice cu urmă nulă este asemenea cu o matrice care are toate elementele de pe diagonală egale cu zero. Datorită faptului că $SpC = 0$, $c \neq \mu E$ pentru $\mu \neq 0$ şi, prin urmare, se va găsi un vector U, astfel încît CU şi U să fie liniar independenţi. Incluzînd în bază vectorii U şi CU, deducem că C este asemenea cu matricea

$$C' = \begin{pmatrix} 0, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \ldots, \gamma_{1n} \\ 1, \gamma_{22}, \gamma_{23}, \ldots, \gamma_{2n} \\ 0, \gamma_{n2}, \gamma_{n3}, \ldots, \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & P \\ Q & \Gamma \end{pmatrix}.$$

Evident că $S_p\Gamma = S_pC = 0$.

Prin urmare, în virtutea ipotezei inducţiei, $\Gamma = S^{-1}\Gamma' S$, în care Γ' este o matrice cu elemente nule pe diagonală. Atunci

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} C' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & PS \\ S^{-1}Q, & S^{-1}\Gamma S \end{pmatrix}$$

are toate elementele de pe diagonală egale cu zero.

Pagina

Cap. VI. Funcţii simetrice 109
§ 1. Exprimarea funcţiilor simetrice prin funcţiile simetrice fundamentale. Calculul funcţiilor simetrice de rădăcinile unei ecuaţii algebrice 109
§ 2. Sume de puteri 113
§ 3. Transformarea ecuaţiilor 116
§ 4. Rezultant şi discriminant 117
§ 5. Transformarea lui Tschirnhaus şi raţionalizarea numitorului 122
§ 6. Polinoame invariante la permutări pare ale variabilelor. Polinoame invariante la permutări circulare ale variabilelor 124

Cap. VII. Algebră liniară 126
§ 1. Subspaţii şi varietăţi liniare. Transformări de coordonate 126
§ 2. Geometria elementară a spaţiului euclidian n dimensional 128
§ 3. Valorile caracteristice şi vectorii proprii ai unei matrice 133
§ 4. Forme pătratice şi matrice simetrice 134
§ 5. Transformări liniare. Forma canonică Jordan 139

Partea a doua

INDICAŢII

Cap. I. Numere complexe 144
Cap. II. Calculul determinanţilor 147
Cap. IV. Matrice 156
Cap. V. Polinoame şi funcţii raţionale de o singură variabilă 158
Cap. VI. Funcţii simetrice 163
Cap. VII. Algebra liniară 165

Partea a treia

RĂSPUNSURI ŞI SOLUŢII

Cap. I. Numere complexe 167
Cap. II. Calculul determinanţilor 188
Cap. III. Sisteme de ecuaţii liniare 200
Cap. IV. Matrice 209
Cap. V. Polinoame şi funcţii raţionale de o singură variabilă 232
Cap. VI. Funcţii simetrice 288
Cap. VII. Algebră liniară 319

Responsabil de carte: Pop A.
Tehnoredactor: Voinoiu M
Corector resp.: Mitu A.

Dat la cules: 3.06.54. Bun de tipar: 2.08.54. Hârtie velină 65 g/m. 61 × 86/16. Coli editoriale 18. Coli tipar: 22. Preţul unui exemplar lei 10,10. Comanda T. 2389-A. 0971/54.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 512.8.(076)
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 512.

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Nr. 3.
B-dul 6 Martie, 29. Bucureşti — R. P. R.

TABLA DE MATERII

Pagina

Din prefaţa la prima ediţie 3
Prefaţă la ediţia a doua 3

Partea întîi

ENUNŢURI

Cap. I. **Numere complexe** 5
§ 1. Operaţii cu numere complexe 5
§ 2. Numere complexe sub formă trigonometrică 7
§ 3. Ecuaţii de gradul al treilea şi al patrulea 14
§ 4. Rădăcinile unităţii 16

Cap. II. **Calculul determinanţilor** 20
§ 1. Determinanţi de ordinul al doilea şi al treilea 20
§ 2. Permutări 21
§ 3. Definiţia determinantului 22
§ 4. Proprietăţile fundamentale ale determinanţilor 24
§ 5. Calculul determinanţilor 26
§ 6. Înmulţirea determinanţilor 44
§ 7. Probleme diverse 50

Cap. III. **Sisteme de ecuaţii liniare** 54
§ 1. Teorema lui Cramer 54
§ 2. Rangul unei matrice 57
§ 3. Sisteme de forme liniare 59
§ 4. Sisteme de ecuaţii liniare 61

Cap. IV. **Matrice** 68
§ 1. Operaţii de matrice pătrate 68
§ 2. Matrice dreptunghiulare. Cîteva inegalităţi 75

Cap. V. **Polinoame şi funcţii raţionale de o singură variabilă** 80
§ 1. Operaţii cu polinoame. Formula lui Taylor. Rădăcini multiple 80
§ 2. Demonstrarea teoremei fundamentale a Algebrei superioare şi probleme conexe 84
§ 3. Descompunerea în factori liniari. Descompunerea în factori ireductibili în corpul numerelor reale. Relaţii între coeficienţi şi rădăcini 85
§ 4. Algoritmul lui Euclid 90
§ 5. Problema interpolării şi funcţiile raţionale 92
§ 6. Rădăcinile raţionale ale polinoamelor. Reductibilitate şi ireductibilitate în corpul numerelor raţionale 96
§ 7. Marginile rădăcinilor unui polinom 99
§ 8. Teorema lui Sturm 101
§ 9. Probleme diverse relative la distribuţia rădăcinilor unui polinom 104
§ 10. Calculul aproximativ al rădăcinilor unui polinom . . . 108

ERATĂ

Pag.	Rândul:	In loc de:	Se va citi:	Din vina:
87	11 de jos	dacă f (x_n) este	dacă f (x^n) este	Tipografiei
112	14 de jos	$x^n + x_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$	$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$	Editurii
116	2 de sus	, f_3, f şi I_4	, f_2, f_3 şi f_4	Tipografiei
129	20 de sus	o bază ortogronală	o bază ortonormată	Editurii
146	17 de sus	$T = \cdots + \cos(\varphi + n\alpha)\, x^n$	$T = \cdots + \sin(\varphi + n\alpha)\, x^n$	„
160	2 de sus	$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x)}{(x - x_k)\varphi'(x_k)}$	$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\,\varphi'(x_k)}$	„
181	7 de sus	$= (x^2 - 1) \prod_{m=1}^{m-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{m} + 1\right)$	$= (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{m-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{m} + 1\right)$	„
187	7 de jos	$= 2\mu \left(\frac{n}{2}\right)$ s $= -\mu \left(\frac{n}{2}\right)$	$= 2\mu \frac{n}{2}$; s $= -\mu \left(\frac{n}{2}\right)$	„
189	2 de sus	Cu semnul $(-1)\, C_n^2$	Cu semnul $(-1)^{C_n^2}$	Tipografiei
223	9 de jos	$P = \begin{pmatrix} \lambda_1, & o, & -\delta \\ \lambda_2, & \frac{\mu_2}{\delta}, & u\mu_1 \\ \lambda_3, & \frac{\mu_2}{\delta}, & v\mu_1 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & -\delta \\ \lambda_2, & \frac{\mu_2}{\delta}, & u\mu_1 \\ \lambda_3, & -\frac{\mu_2}{\delta}, & v\mu_1 \end{pmatrix}$	„
241	11 de jos	$x^2 + x + 1$	$x^2 - x + 1$	Editurii
246	2 de sus	$M_1(x) = x^3 + x^2 + 3x - 2$	$M_1(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$	„
250	3 de sus	$f(x) = 1 + \frac{x-1}{2!} - \frac{(x-1)(x-x)}{3!} - \cdots$	$f(x) = 1 - \frac{x-1}{2!} + \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{3!} - \cdots$	Tipografiei
337	4 de jos	l) $x_1'^3 - x_2'^2 + 3x_3'^2 + 5x_4'^2$	l) $x_1'^2 - x_2'^2 + 3x_3'^2 + 5x_4'^2$	Editurii